Содержание

1 On various definitions of attractors. 3
1.1 Introduction . . . 3
1.2 Maximal attractor . . . 3
1.3 Milnor attractor . . . 5
1.4 Minimal and statistical attractor . . . 6
1.5 Non-coincidence of attractors . . . 6
1.6 Main problems . . . 8

2 SRB measures and Palis paradigm 10
2.1 A Cherry Cell . . . 10
2.2 SRB-measures . . . 11
2.3 Palis paradigm . . . 13

3 Second part of Palis hypothesis: Newhouse effect 15
3.1 Гомоклиническое пересечение . . . 15
3.2 Теорема Биркгофа-Смейла . . . 16
3.3 Гиперболические множества . . . 16
3.4 Гиперболическое множество гомоклинического пересечения 17
3.5 Картинка Палиса и гомоклинические касания . . . 17
3.6 Одна притягивающая периодическая орбита . . . 17
3.7 Касание слоев ламинаций . . . 18
3.8 Неустойчивые аттракторы Милнора . . . 19

4 Gorodetsky-Ilyashenko strategy and intermingling basins 22
4.1 Стратегия Городецкого-Ильяшенко . . . 22
4.1.1 Случайные ДС — ступенчатые косые произведения . 22
4.1.2 Гладкая реализация . . . 23
4.1.3 От СКП к мягким гельдеровым косым произведениям 24
4.1.4 Чем хороши гельдеровы косые произведения . . . 25
4.1.5 Показатели Ляпунова . . . 26
4.2 Перемежающиеся бассейны притяжения . . . 26

5 Holder everywhere 28
5.1 Holder property . . . 28
5.2 Topological conjugacy of expanding maps . . . 28
5.3 Holder conjugacy . . . 29

5.4 Skew products and their perturbations 31
5.4.1 A skew product 31
5.4.2 A perturbed skew product 31
5.5 Holder foliations: revisited 33
5.5.1 Partial hyperbolicity 33
5.5.2 Existence of invariant foliations 34
5.5.3 Compact foliations 34
5.5.4 Main theorem 35

6 Толстые аттракторы и строгая эргодичность 37
6.1 «Большие» аттракторы 37
6.2 Толстые аттракторы 38
6.3 Толстые аттракторы эндоморфизмов 38
6.4 Как строятся толстые аттракторы? 38
6.5 Нормальные формы косых произведений 39
6.6 Сильная эргодичность относительно инвариантной меры . 40
6.7 Пример динамической реализации произвольного множества нулевой меры 41

7 Кошмар Фубини и его преодоление 44
7.1 Разное 44
7.2 Кошмар Фубини 44
7.3 Следствия гельдеровости 44
7.4 Размерность Хаусдорфа 45
7.5 Сильная эргодичность 46

8 Пузыри 46
8.1 Построение Арнольда 46
8.2 Шаги доказательства теоремы 48
8.3 Доказательство основной леммы 51
8.4 Открытые вопросы 52

9 Эффект Джозефсона 52
9.1 Уравнения на торе 52
9.2 Общая теория 53
9.3 Языки Арнольда 54
9.4 Языки Арнольда «уравнения Джозефсона» 55

Текущая версия записи лекций Летней Школы-2012 **Ю.С. Ильяшенко**

В русском тексте «Теорема» и т.д. — по-русски
В английском тексте: picture → figure
Прислать рис. к лек. 6, 7

1 On various definitions of attractors.

1.1 Introduction

In general, by attractor we understand an attracting set in a phase space of a dynamical system. The word *attractor* was firstly mentioned by Auslaender in his paper(?) in 1964. There is a great variety of rigorous definitions of an *attractor*, serving different needs. Let us fix the notations: let F be a diffeomorphism of some manifold X with boundary or without it. In general, we will denote by A an attractor of the system.

1.2 Maximal attractor

Historically the first rigorous definition of attractor was a definition of a maximal attractor.

Definition 1.1. Suppose there exists an open set $B \subset X$ such that $f(\overline{B}) \subset B$ - then we can define so-called *maximal attractor* in the following way (see picture **??**):

$$A_{\max} = \bigcap_{n=1}^{\infty} F^n(B)$$

Remark 1.2. The general definition of $A_{\max}$ requires only a topological structure on X which is defined since X is a manifold. We say that $A_{\max}$ is a global attractor corresponding to a pair (X, F) iff for a.e. point one of its iterations eventually arrives into B. Note that here we need X be a set with a measure. In the case X is a Riemannian manifold, the measure is defined by a metric. Let us note, that in some sense the system chooses the attractor for itself: to understand what points belong to attractors and what points do not, we have just to put in work a mechanism of F, wait and then intersect.

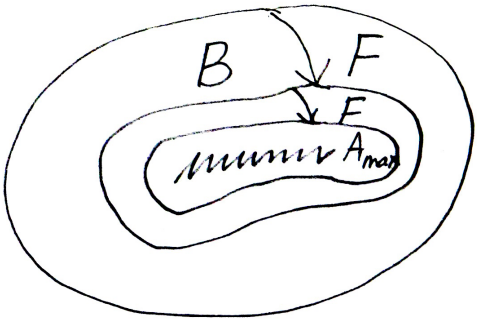

Рис. 1.1: The construction of A_{max}

Example 1.3. *A simplest example of a map demonstrating a maximal attractor is a north-south map of a circle (pic.* **??***): any open domain which doesn't contain a repeller S is mapped in a domain close to an attractor N: $A_{\max} = N$.*

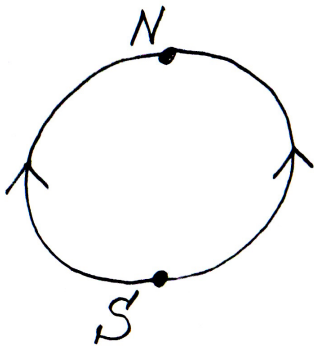

Рис. 1.2: A north-south map: the north attracts, the south repells

Example 1.4. *Let us extend the previous example, i.e. let's take an annulus X, containing a circle with a north-south map f on it. The coordinates on an annulus are chosen in such a way, that φ is an argument of a point on a ring, x is its shifted radial coordinate: $x = 0$ on the circle. F is now given by*

$$F : (\varphi, x) \mapsto \left(f(\varphi), \frac{x}{2} \right) \tag{1.1}$$

where f is the north-south map mentioned above. Here the south becomes a saddle and the north becomes a node (picture **??***).*

In this case $A_{\max} = S^1$ (if we choose $B = X$) and that seems to be not an appropriate result, because the answer $A_{\max} = N$ is expected intuitively. Although if B is chosen properly (not containing S and its stable separatrixes), then $A_{\max}(B) = N$ as it should be.

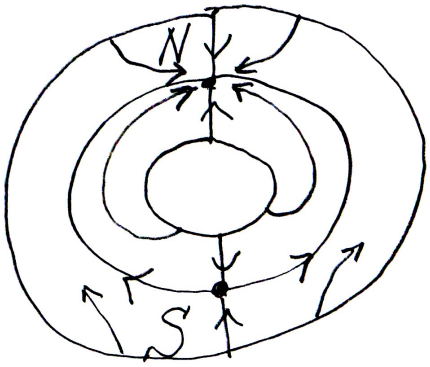

Рис. 1.3: North is an attracting node, south is a saddle

Example 1.5. *As in the previous example let us define F by the same formula* (**??**) *but with another f: f has a single parabolic point P (picture* **??***). For such f, there is no open set which is mapped into itself so in this case, $F(X) \subset X, A_{\max} = S^1$. But, as usually, our intuition requires the answer $A_{\max} = P$. However this example can not be saved by the choice of B.*

The definition of $A_{\max}$ has the disadvantage illustrated in the examples above: first, a natural $A_{\max} \neq X$ doesn't exist for all the systems. Second, if we require the existence of $A_{\max}$ we end up with having too many extra points in the attractor. Nevertheless almost twenty years the definition of a maximal attractor was the only one in a world of attractors.

1.3 Milnor attractor

In 1985 in his paper [Comm. of Mathematical Physics?] John Milnor introduced a new concept of attractor. Let us give two equivalent definitions of the Milnor attractor:

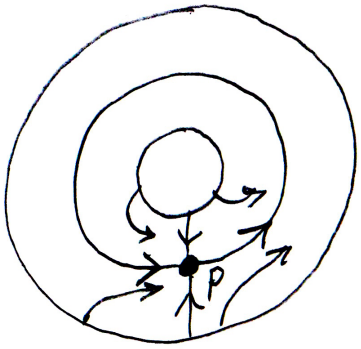

Рис. 1.4: P is a parabolic point and a natural attractor

Definition 1.6. A_{M} is a minimal closed set containing ω-limit sets of a.e. point.

Definition 1.7. A_{M} is a minimal closed set such that

$$d_n(x) = d\left(f^n(x), A_{\mathrm{M}}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{a.e.} 0$$

Milnor attractor A_{M} always exists, and $A_{\mathrm{M}} = N$ in the examples above. In the case of f with a parabolic point A_{M} is Lyapunov unstable.

1.4 Minimal and statistical attractor

Definition 1.8. Let X be a metric measure space, and $f : X \to X$ a homeo, for this map A_{stat} (A_{min}) is a minimal closed set such that Chesaro series (the series of arithmetic averages) of $d_n(x)$ converge almost everywhere (with respect to the measure on X).

1.5 Non-coincidence of attractors

From the definition follows

$$A_{\mathrm{min}} \subseteq A_{\mathrm{stat}} \subseteq A_{\mathrm{M}} \subseteq A_{\mathrm{max}}$$

Let us mention the examples of non-coincidence of these attractors:

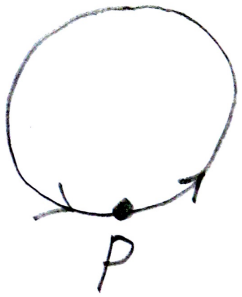

Рис. 1.5: $A_{\max} \neq A_{\mathrm{M}}$: A diffeomorphism of a circle with one parabolic point

$A_{\max} \neq A_{\mathrm{M}}$: a diffeomorphism of a circle with a unique parabolic point p (picture **??**), $A_{\max} = S^1$, $A_{\mathrm{M}} = p$.

$A_{\mathrm{stat}} \neq A_{\mathrm{M}}$: let us take a separatrix loop of a planar saddle S and a set X an interior of the separatrix loop, the trajectories tend to the separatrix (picture **??**). If we take $f = g_v^1$ then A_{M} is a separatrix. However, $A_{\mathrm{stat}} = S$. The time spent in a neighborhood of a saddle is growing while the time spent near the other part of the loop is approximately the same.

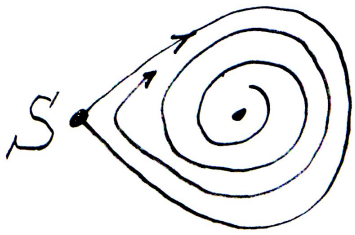

Рис. 1.6: $A_{\mathrm{stat}} \neq A_{\mathrm{M}}$: attracting separatrix loop

$A_{\min} \neq A_{\mathrm{stat}}$: let us consider a vector field with one saddle and one saddle-node with common separatrixes as on picture **??**. In this case $A_{\mathrm{stat}} = S \cup SN$, $A_{\min} = S$. See the result of V. Kleptsyn in ETDS, 2006.

A theorem by A.Gorodetskij states that all the attractors coincide in a case of hyperbolic diffeomorphisms.

Рис. 1.7: $A_{\min} \neq A_{\text{stat}}$: a vector field with a saddle and a saddle-node

1.6 Main problems

Problem 1.9. Could the inequalities $A_{\min} \neq A_{\text{stat}} \neq A_{\text{M}}$ be obtained for diffeomorphisms in a finite codimension?

Problem 1.10. How generic are the systems (diffeomorphisms) such that $A_{\max} \neq A_{\text{M}}$? In other words, how often A_M is Lyapunov non-stable?

Remark 1.11. The codimension 1 answer is easily given by NH: non-hyperbolic diffeomorphisms.

A generic family of diffeomorphisms intersects NH by some isolated points.

There is an unpublished result by V.Kleptsyn that non-coincidence of Milnor and statistical attractors could be obtained in a Cantor set of points in a generic family (Cherry cell).

Definition 1.12. For a diffeomorphism f and a continuous function $\varphi : X \to \mathbb{R}^1(\mathbb{C}^1)$ let us define $\overline{\varphi_n}(x) = \frac{1}{n}\sum_0^{n-1} \varphi(f^k x)$. Then a time average is a limit

$$\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} \overline{\varphi_n}(x)$$

The basic result in ergodic theory is the Birkhoff-von Neumann ergodic theorem about the existence of time averages.

Theorem 1.13. *If f preserves some measure μ on X then $\overline{\varphi}$ exists μ-almost everywhere on X for every $\varphi \in C(X)$ (and even $\varphi \in L^1(X)$).*

But f can easily not preserve a Lebesgue measure which is essential, so let us ask a question of such kind: let f be a diffeomorphism of a smooth

manifold, μ a Lebesgue measure and φ a continuous function on X. Does $\overline{\varphi}$ exist almost everywhere in a sense of Lebesgue measure?

In general the answer is no and the Bowen example shows it: we consider a vector field with two saddles S_1 and S_2. Suppose S_1 and S_2 have two common sepatrixes. Then with eigenvalues of linearisation in S_1 and S_2 wisely chosen a one-time map of such a vector field serves as an example. Take $f = g_v^1$ and a continuous function φ: $\varphi(S_1) = 1, \varphi(S_2) = 0$. This function doesn't have a time average, because $\overline{\varphi_n}$ oscillate between 0 and 1.

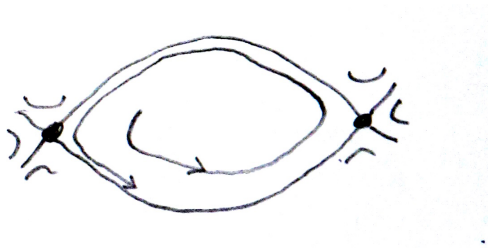

Рис. 1.8: A vector field with two singular points S_1 and S_2

Suppose a dynamical system is not like a Bowen's one, i.e. for any $\varphi \in C^0$ the limit $\overline{\varphi}(x)$ exists almost everywhere (in a sense of Lebesgue measure) and doesn't depend on the point. Then the map $\varphi \mapsto \overline{\varphi}$ is a continuous linear fuctional. As we know, any continuous functional on C is a measure in a sense that $\overline{\varphi} = \text{const} = \int \varphi d\mu$ almost everywhere. Such measures μ are called SRB-measures (Sinaj-Ruelle-Bowen). There exist beautiful conditions for the existence of SRB-measure.

There is a famous Palis conjecture which attracts lots of interest in dynamical systems research. This hypothesis states that Bowen example is an exceptional case.

Conjecture 1.14. *For a generic diffeomorphism there exists an SRB-measure.*

Palis considers that's true, Ruelle and Takens claimed an opposite conjecture, and no one knows who is right.

2 SRB measures and Palis paradigm

2.1 A Cherry Cell

A Cherry cell is a surgery of a vector field on a torus, which is constructed as follows. Consider a constant vector field v on $\mathbb{T}^2$. Let us make a surgery of v by choosing a domain in the phase space and modifying the phase portrait of v in this domain in such a way that in the neighborhood of the boundary the vector field doesn't change.

Let this domain be a flowbox. We take one trajectory in a flowbox and split it with two singular points S and R as shown on figure **??**

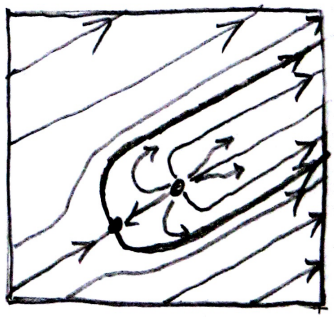

Рис. 2.1: A Cherry cell

Then we modify the other trajectories in such a way that S becomes a saddle and R becomes a repelling node. Separatrices of the saddle forms a picture which looks like a wineglass. It is informally called *a cup*.

Denote by v_c the vector field with two singular points obtained after a described modification — it is called the *Cherry cell*.

Lemma 2.1 (?)**.** *There is an alternative for a Cherry cell:*

1) *The incoming separatrix W^s of the saddle S is absorbed by the cup when the cup is extended forward;*

2) *or the separatrix is not absorbed and its extension is dense outside the extension of the cup.*

We call *vector fields of type* 1 those Cherry cells v_c that correspond to a first part of an alternative. The vector fields of type 2 correspond to a second part of an alternative. Let us now consider the perturbed vector field $v_{c,\varepsilon} = v_c + (0, \varepsilon)$.

Remark 2.2. If it were not v_c but v the parameter ε would simply change the direction of the constant vector field.

Theorem 2.3 (Kleptsyn, 2004)**.** *If $v_{c,\varepsilon}$ is of type 2, then $A_{\mathrm{M}} = \mathrm{Cl}\, W^s$ and $A_{\mathrm{stat}} = S$. Moreover, the type 2 Cherry cells are rare:*

$$E = \{\varepsilon | v_{c,\varepsilon} \text{ is of type } 2\} \Rightarrow \operatorname{mes} E = 0,\ \dim_H E = 0.$$

Here $\dim_H$ is the Hausdorff dimension.

Let us give an idea of the proof of non-coincidence of A_{M} and A_{stat}:

The repelling node R inside the cup repels everything to the boundary of the cup. Note that if the vector field is of type 2 the boundary is included into $\mathrm{Cl}\, W^s$. Therefore $A_{\mathrm{M}} = \mathrm{Cl}\, W^s$.

Recall that A_{stat} is such a set that almost all the points spend almost all the time in its neighborhood. The proof is based on the idea that the trajectories live longer near the saddle point than near the regular points and therefore S becomes a statistical attractor. A nontrivial part is a calculation showing that the average time the trajectories spend near the saddle tends to 1.

It is easy to construct a codimension 1 set in a space of vector fields that serves as an example of non-coincidence of Milnor and statistical attractors: for example, all vector fields with an attracting separatrix loop. This set intersects a generic 1-parameter family by the isolated points.

Using a construction of a Cherry cell, V. Kleptsyn showed that a generic 1-parameter family and the set of maps for which $A_{\mathrm{M}} \neq A_{\mathrm{stat}}$ may actually intersect each other by a set of Cantor type.

2.2 SRB-measures

Definition 2.4. A measure μ is called *invariant* with respect to the map f if $\mu(f^{-1}(A)) = \mu(A)$ for any measurable A.

Theorem 2.5 (Krylov–Bogoljubov)**.** *Any diffeomorphism of a compact manifold admits an invariant measure.*

Definition 2.6. An invariant measure μ is called *ergodic* if for every invariant measurable set A either $\mu(A) = 0$ or $\mu(A) = 1$.

Examples

1. A rotation of a circle $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ by an angle $\alpha \notin \mathbb{Q}$. The Lebesgue measure on the circle is an ergodic invariant measure.

2. A rotation with $\alpha \in \mathbb{Q}$. The Lebesgue measure is invariant but not ergodic.

3. A hyperbolic diffeomorphism of a circle (for example, a north-south map). Invariant measures sit on periodic orbits. If the support is a periodic orbit, then the measure is ergodic.

Exercise 1. Prove the statements given in the examples.

Ergodic theory from the very beginning deals with a map that preserves some fixed measure, while the theory of dynamical systems begins with a map without any measure fixed a priori. In some sense, the theory of SRB-measures is an attempt to unite these two approaches.

SRB-measure could be defined for any diffeomorphism (or endomorphism, i.e. circle doubling map) f of a compact manifold onto itself. Let us first give a way to "check" the existence of SRB-measure before giving an explicit definition.

For every $\varphi \in C(X)$ we define the time average

$$\overline{\varphi(x)} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(f^k(x)),$$

if this limit exists.

Suppose that $\overline{\varphi(x)}$ is defined for every continuous φ in Leb-a.e. x and does not depend on x. Then this time average is a bounded linear functional on $C(X)$, therefore it may be considered as a measure. More exact, the Riesz theorem says that there is a charge μ such that $\overline{\varphi(x)} = \int_X \varphi d\mu$. The definition of our functional imply that it is positive for positive φ, so μ is a measure. It is called *an SRB-measure*. A formal definition follows.

Definition 2.7. A measure μ is called *an SRB-measure* if for every $\varphi \in C(X)$ the time average $\overline{\varphi(x)}$ is defined Leb-a.e. and $\overline{\varphi(x)} = \int\limits_X \varphi d\mu$.

If the SRB-measure exists, it is unique since the Riesz theorem gives only one measure associated with linear functional. The result of Krylov-Bogoljubov procedure (if we start from Lebesgue measure) coincides with SRB-measure.

Conjecture 2.8 (Palis)**.** *SRB-measure generically exists (for diffeomorphisms of closed manifolds).*

In this direction we have

Theorem 2.9 (Bowen, 70s)**.** *Hyperbolic diffeomorphisms admit the SRB-measure.*

Examples of hyperbolic diffemorphisms: Anosov map of a torus $\left(\begin{smallmatrix}2&1\\1&1\end{smallmatrix}\right)$, Smale–Williams solenoid.

The theorem of Bonatti and Viana proves the existence of SRB-measure in a partially hyperbolic case with some additional assumptions.

Theorem 2.10 (Ruelle)**.** *SRB-measure depends smoothly on a hyperbolic map. For example, if one considers a* 1*-parameter family of diffeomorphisms f_ε, its SRB-measure can be written as $\mu_\varepsilon = \mu_0 + \varepsilon\mu' + o(\varepsilon)$.*

2.3 Palis paradigm

The Palis conjecture about the generic existence of SRB-measures is actually only one part of the Palis paradigm. Historically, the previous paradigms were:

1. Andronov: generic diffeomorphism has but a finite number of periodic orbits. (Holds true true for diffeomorphisms of a circle and flows on a two-sphere.)

2. The Smale paradigm about the Morse-Smale diffeomorphisms, which happened to be not true: generic systems are Morse-Smale ones

3. The Smale–Arnold (?) paradigm emphasizing the hyperbolic systems, which also is not true: generic systems are hyperbolic

Another part of the Palis paradigm is the finitude of the Palis attractors. What does it mean?

Definition 2.11. Invariant subsets of Milnor attractor A_M on which the map is transitive are called *the components of* A_M or *Palis attractors*.

For example, every attracting periodic orbit is a Palis attractor.

Conjecture 2.12 (Palis)**.** *A metrically generic diffeomorphism has* A_M *with a finite number of components.*

For hyperbolic systems, this conjecture holds true (Smale theorem). For non-hyperbolic systems, it is open. Moreover, well-known Newhouse effect can be considered as a "counterexample" to the conjecture.

Conjecture 2.13 (Thom)**.** *Generic dynamical system has a finite number of attracting periodic orbits.*

But in 70s Newhouse proved the

Theorem 2.14 (Newhouse)**.** *There exists a domain in the space of diffeomorphisms of* S^2 *such that a topologically generic map from this domain has an infinite number of attracting periodic orbits.*

Actually, it is not a counterexample to Palis conjecture. It is important that this theorem deals with the *topological* genericity while Palis conjecture refers to the *metric* genericity, so they are not in contradiction. More accurately:

Definition 2.15. A property A is called topologically generic in a domain U of a functional space *Func* if the set $\{f \in U | f \text{ has } A\}$ contains a countable intersection of open dense subsets of U.

It is impossible to introduce a translation invariant measure on a functional invariant Banach space, so one cannot say that "a property is metrically generic if it holds for a set of full measure". In fact, there exists various approaches to the notion of metric genericity in functional spaces. The following one is due to Arnold.

Definition 2.16. Consider finite-parametric family F in a functional space *Func*: let $B \subset \mathbb{R}^n$ be a base of a family $\mathcal{F}\colon B \to \mathit{Func}, \mathcal{F}(B) = F$. Property A is called *metrically generic* in $\mathcal{F}$ if the set $\{\alpha \in B | \mathcal{F}(\alpha) \text{ has } A\}$ has a full measure.

Definition 2.17. Property A is called metrically generic if it is metrically generic for topologically generic family $\mathcal{F}$ in the sense of previous definition.

For example, the Liuvilles numbers are topologically generic, but not metrically generic.

3 Second part of Palis hypothesis: Newhouse effect

3.1 Гомоклиническое пересечение

Рассмотрим линейное седло на плоскости $(x, y) \mapsto (\lambda x, \mu y)$, где $0 < \lambda < 1 < \mu$. У него есть устойчивая сепаратриса $y = 0$, неустойчивая сепаратриса $x = 0$, и траектории почти всех точек стремятся к неустойчивой сепаратрисе в будущем и к устойчивой в прошлом. Оказывается, что у нелинейных седел (то есть неподвижных точек, линеаризация в которых является линейным седлом) локальные свойства те же:

1) есть гладкие сепаратрисы (теорема Адамара-Перрона);

2) картина топологически эквивалентна своей линейной части вблизи особой точки (теорема Гробмана-Хартмана)

Гладкой эквивалентности нелинейного седла своей линейной части, вообще говоря, нет, это следует из теории нормальных форм.

Предположим, что неустойчивая сепаратриса неподвижной точки $\mathcal{W}^u$ пересекает устойчивую сепаратрису $\mathcal{W}^s$. Точка их пересечения является гомоклинической, то есть стремится к одной и той же неподвижной точке при прямых и обратных итерациях. Все ее образы и прообразы также являются точками пересечения многообразий $\mathcal{W}^u$ и $\mathcal{W}^s$ в силу их инвариантности. Возникает так называемая гомоклиническая картина (см.рис. **??**).

Рис. 3.1: Homoclinical picture

3.2 Теорема Биркгофа-Смейла

Гомоклиническое пересечение влечет за собой наличие счетного числа периодических орбит. Это связано с тем, что динамика на некотором подмножестве задается отображением подковы Смейла (см. рис. **??**), которое имеет счетное число периодических орбит.

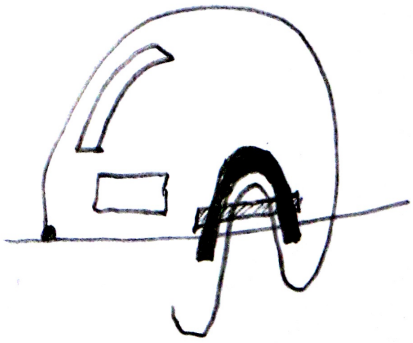

Рис. 3.2: Рождение подковы Смейла из гомоклинического пересечения

TODO: стрелочки на картинке

3.3 Гиперболические множества

Definition 3.1. Пусть $f\colon X \to X$ – диффеоморфизм, $\Lambda \subset X$ – его компактное инвариантное подмножество. Множество Λ гиперболично, если

(а) для всех $p \in \Lambda$ существует разложение $T_pX = E^u_p \oplus E^s_p$, это разложение непрерывно по p и инвариантно относительно df (т.е. $df(E^u_p) = E^u_{f(p)}$, $df(E^s_p) = E^s_{f(p)}$) и $\dim E^u_p$ не зависит от p.

(б) df сжимает E^s и растягивает E^u:

$$\exists \lambda \in (0,1)\colon \forall v \in E^s\ |df(v)| < \lambda |v|,\ \forall v \in E^u\ |df(v)| > \lambda^{-1}|v| \tag{3.1}$$

Example 3.2. *Линейно сжимающая неподвижная точка гиперболична с* $\dim E^u = 0$*, седловая неподвижная точка на плоскости гиперболична с* $\dim E^u = \dim E^s = 1$.

Theorem 3.3. *Через каждую точку гиперболического множества проходит два локальных (т.е. заданных в окрестности этой точки) многообразия* W^u *и* W^s*, таких что* W^u *касается* E^u*,* W^s *касается* E^s*; эти*

семейства многообразий инвариантны (такое семейство многообразий называется ламинацией).

3.4 Гиперболическое множество гомоклинического пересечения

Рядом с точкой гомоклинического пересечения можно найти подкову, а значит есть инвариантное гиперболическое множество и инвариантные ламинации.

3.5 Картинка Палиса и гомоклинические касания

Изобразим мир всех динамических систем. В 60-е годы эта картинка представлялась так: есть большое множество гиперболических систем, а остальные системы лежат в неизученном темном мире. В 70-е гиперболическая область стала казаться маленькой, темный мир увеличился, но в нем появились изученные белые точки. Одной из таких точек, которую можно назвать страной чудес, являются системы с гомоклиническим касанием. Их изучение привело к отрицательному ответу на следующий вопрос Рене Тома: верно ли, что типичная динамическая система имеет конечное число притягивающих периодических орбит. Наличие счетного числа притягивающих периодических орбит для локально топологически типичного множества динамических систем, близких к системе с гомоклиническим касанием, называется *явлением Ньюхауса*.

3.6 Одна притягивающая периодическая орбита

Рассмотрим прямоугольник в окрестности точки гомоклинического касания, вытянутый вдоль устойчивой сепаратрисы и близкий к ней. Он притянется к седлу, а потом растянется вдоль неустойчивого многообразия, поэтому некоторый его образ пересечет его самого. Теперь включим отображение в однопараметрическое семейство, разрушающее касание. Для некоторого значения параметра и некоторой степени рассматриваемого диффеоморфизма центральная часть прямоугольника будет отображаться внутрь себя (см. рис. **??**), что и даст притягивающую периодическую орбиту.

Покажем, как строить вторую притягивающую периодическую орбиту, остальные строятся аналогично. Будем пользоваться тем, что си-

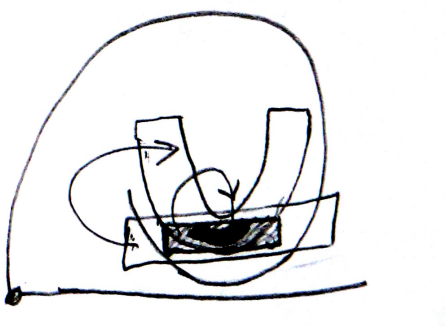

Рис. 3.3: A construction of an attracting periodic orbit

стемы с гомоклиническими касаниями локально плотны, это поясняется ниже. Пусть мы уже построили первую притягивающую периодическую орбиту, она выживает при малых возмущениях, то есть встречается у всех отображений из некоторой области U. Найдем в U систему с гомоклиническим касанием. Пользуясь описанным выше рецептом, возмутим ее, не выходя из U, так, чтобы появилась вторая притягивающая периодическая орбита. Мы показали, что для любого n множество систем с n притягивающими периодическими орбитами открыто и всюду плотно в некоторой не зависящей от n области, из чего и следует локальная топологическая типичность явления Ньюхауса.

3.7 Касание слоев ламинаций

Укажем причину, по которой системы с гомоклиническим касанием локально плотны, т.е. в окрестности возмущенного гомоклинического касания можно найти гомоклинические касания. Касание сепаратрис одного седла – явление нетипичное. В примере Ньюхауса типичность касания ламинаций достигается за счет «густоты» гиперболического множества. При возмущении системы с «густым» гиперболическим множеством снова возникают гиперболическое множество, устойчивая и неустойчивая ламинации. Эти ламинации эволюционируют, подобно сепаратрисам седла, поэтому возникают касания, которые рождают притягивающие периодические орбиты.

3.8 Неустойчивые аттракторы Милнора

Рассмотрим следующее ступенчатое косое произведение: $X = \Sigma^2 \times \mathbb{R}$, $F : X \to X$, $(\omega, x) \to \lambda_{\omega_0} x$, где $0 < \lambda_0 < 1 < \lambda_1$, $\lambda_0 \lambda_1 < 1$. Пусть μ – конечная мера на $\mathbb{R}$, например, образ меры Лебега при гладком отображении интервала на прямую. Тогда $A_M = \Sigma^2 \times \{0\}$, и он неустойчив по Ляпунову. Этот пример называется стандартным неустойчивым аттрактором, он разрушается малым шевелением, поскольку основан на совпадении аттрактора одного послойного отображения с репеллером другого.

Цель: найти область в функциональном пространстве, отображения из которой имеют неустойчивый A_M. Есть программа, позволяющая переходить от ступенчатых косых произведений к диффеоморфизмам, поэтому мы будем пытаться строить ступенчатое косое произведение с неустойчивым аттрактором. Неустойчивость аттрактора в рассмотренном примере связана с совпадением аттрактора и репеллера разных послойных отображений. Это свойство легко разрушается, поэтому будем рассматривать аттракторные и репеллерные поверхности, пересекающиеся неустранимым образом. Это первый ингредиент конструкции.

Второй ингредиент – линейное седло с одномерным сжимающим и двумерным растягивающим многообразием. Будем считать, что растяжение вдоль одного из растягивающих направлений более сильное, чем вдоль другого. Через устойчивое и слабо неустойчивое направления проходит центрально-устойчивая поверхность. Рассмотрим кривую, пересекающую ее трансверсально в точке неустойчивого многообразия, см. рис. **??**. Тогда ее образы будут стремиться к сильно неустойчивому направлению.

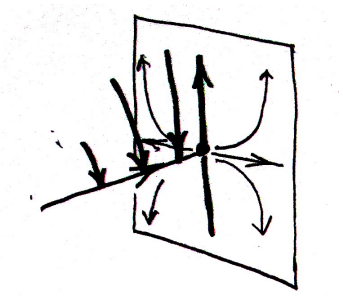

Рис. 3.4: Второй ингредиент конструкции: трёхмерное седло

Построим первый модельный пример. Послойные отображения изображены на рисунке. Тогда (все это пока не доказано) A_M пересекается со слоем над последовательностью из одних нулей (0) по кривой A_0, а пересечение со слоем над последовательностью из одних единиц можно получить, итерируя A_0 отображением f_1 : $A_M \cap (1) = \lim_{n\to\infty} f_1^n(A_0)$. В этом случае $A_M \cap (1)$ будет содержать сепаратрису, соединяющую две инвариантных сферы, а также кривую, соединяющую седло и аттрактор на правой сфере вдоль сильнонеустойчивого направления, и из-за этого будет неустойчивым (см. рисунки **??**, **??**).

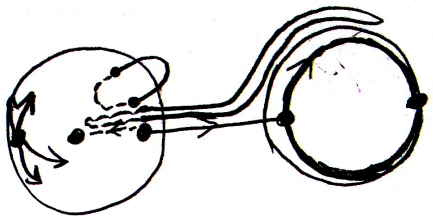

Рис. 3.5: Сепаратрисы и аттрактор

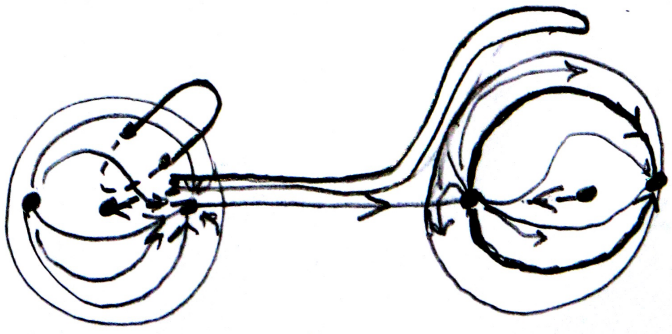

Рис. 3.6: Туманная фантазия: как устроен аттрактор Милнора?

Описанный пример имеет бесконечную коразмерность, поскольку сепаратрисы седел на правой и левой сферах совпадают. Интересно посмотреть, что будет, если они не совпадают, а пересекаются. Гипотетическое

положение аттракторной кривой $\lim_{n\to\infty} f_1^n(A_0)$ в этом случае изображено на рисунке (**??**).

Рис. 3.7: Разрешаем сепаратрисам пересекаться: как теперь устроен аттрактор?

Потом можно поробовать заставить сепаратрисы пересекаться неустранимым образом как в явлении Ньюхауса за счет густоты гиперболических множеств. Туманная фантазия: произвести хирургию – вклеить вместо седел по густому гиперболическому множеству типа подковы (см. **??**), а затем добиться пересечения сепаратирис средствами, похожими на использованные Ньюхаусом.

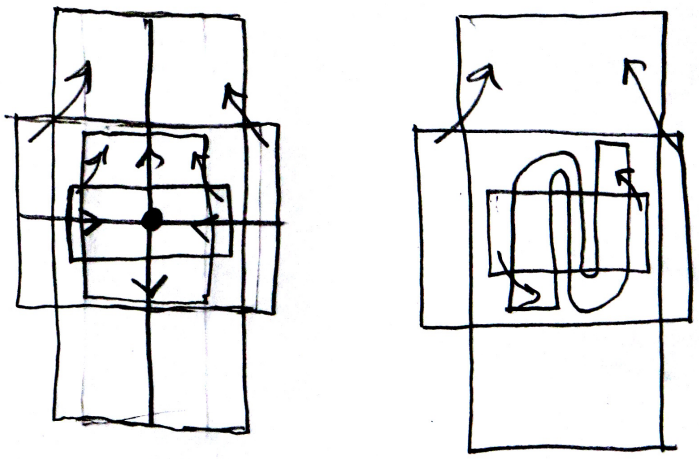

Рис. 3.8: Хирургия с вклейкой подковы Смейла вместо гиперболического седла

4 Gorodetsky-Ilyashenko strategy and intermingling basins

4.1 Стратегия Городецкого-Ильяшенко

Цель стратегии Городецкого—Ильяшенко — поиск типичных свойств диффеоморфизмов. В стратегии три шага. Первый — обнаружить свойство для ступенчатого косого произведения, второй — перенести свойство ступенчатого на мягкое косое произведение, третий — возмутить мягкое косое произведение в классе диффеоморфизмов, сохранив свойство. Если не возникнет препятствий, после третьего шага мы получим область с нужным свойством в пространстве диффеоморфизмов. В лекции опишем общий вид стратегии и возникающие трудности.

4.1.1 Случайные ДС — ступенчатые косые произведения

Рассмотрим пространство $X = \Sigma^k \times M$, где Σ^k — пространство двусторонних последовательностей из элементов множества $\{0, 1, ...k-1\}$, а M — компактное гладкое многообразие, с краем или замкнутое. Пусть σ — левый сдвиг в пространстве последовательностей. Назовем *ступенчатым*

косым произведением отображение

$$F:\ X \to X,\ (\omega, x) \mapsto (\sigma\omega, f_{\omega_0} x).$$

Послойное отображение f_{ω_0} зависит только от нулевого знака последовательности ω, поэтому на слой действуют всего k различных послойных отображений. Ступенчатые косые произведения моделируют случайную динамику, которую порождают на M послойные отображения, если их применять в произвольном порядке. Пример мы приводили в предыдущей лекции, в части о неустойчивых аттракторах Милнора. Допустим, мы уже построили СКП с нужными свойствами. На следующем шаге стратегии перейдем к диффеоморфизму.

4.1.2 Гладкая реализация

Приведем пример гладкой реализации СКП. Пусть B — двумерный диск, рассмотрим диффеоморфизм

$$X = B \times M,\ \mathcal{F}:\ X \to X,\ (b, x) \mapsto (h(b), f_b(x)),$$

где h — гладкое отображение диска B в себя, включающее в себя отображение подковы для областей $D_0,\ D_1$ (см. рис. **??**), и $f_b \equiv f_0$, если b принадлежит D_0, $f_b \equiv f_1$, если b принадлежит D_1. Инвариантное гиперболическое множество Λ подковы можно закодировать бесконечными двусторонними последовательностями из нулей и единиц, поэтому ограничение $\mathcal{F}_\Lambda$ действует на Λ как ступенчатое косое произведение над сдвигом Бернулли в Σ^2.

Один из недостатков построенной гладкой реализации — Λ не является аттрактором $\mathcal{F}$, и свойства косого произведения могут не переноситься на построенную гладкую реализацию. *Примеров* с замечательными свойствами много, однако мы хотим находить *эффекты*, типичные для целой области пространства диффеоморфизмов. В переходе от одного отображения к типичному семейству в функциональном пространстве и состоит третий шаг стратегии, подробнее о нем расскажем в следующей лекции.

Один из более тонких, чем вложение подковы в базу, способов сгладить СКП — выбрать отображением в базе диффеоморфизм Аносова. Однако для него, как и для подковы, следует выбирать гомотопные послойные отображения.

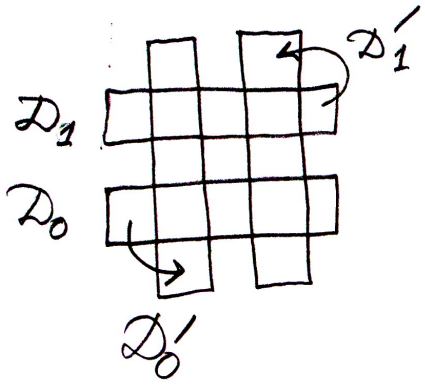

Рис. 4.1: Подкова Смейла

Две задачи к третьей лекции:

Задача 1: найти на прямой два канторовских совершенных множества C и D нулевой меры, такие, что при любом a из $(0,1)$ пересечение $(C+a)\bigcap D$ непусто.

Задача 2: найти в трехмерном пространстве две подковы Смейла с двумерным растягивающим направлением и одномерным сжимающим, таких, что одномерные инвариантные слоения подков пересекаются неустранимо относительно

а) сдвигов

б) возмущений одной из подков диффеоморфизмами.

4.1.3 От СКП к мягким гельдеровым косым произведениям

В СКП послойное отображение зависело только от нулевого знака последовательности. В мягких косых произведениях послойное отображение непрерывно зависит от всей последовательности,

$$X=\Sigma^k\times M,\ F:\ X\to X,\ (\omega,x)\mapsto(\sigma\omega,f_\omega x).$$

В ступенчатом случае можно явно выписать суперпозицию послойных отображений, которые действовали на слой за большое число итераций. В мягком случае известна малая часть отображений, а остальные близки к известным, поэтому мы можем выписать суперпозицию только с

некоторой точностью, которая падает, если увеличивать число итераций. Неточность проще контролировать, если требовать более строгой зависимости послойного отображения f_ω от точки ω в базе. Требование гладкой зависимости нереалистично, а непрерывная зависимость включена в определение мягкого косого произведения, поэтому потребуем «чуть больше, чем непрерывности».

Definition 4.1. Мягкое косое произведение назовем *гёльдеровым* с показателем $\alpha > 0$, если

$$\|f_\omega - f_{\omega'}\|_C \leq c_0 d^\alpha(\omega, \omega').$$

Иногда удобно брать норму в $C^k, k \geq 1$.

Теория Хирша—Пью—Шуба утверждает, что, если требовать от косого произведения частичной гиперболичности, при малом возмущении в классе диффеоморфизмов структура косого произведения выживет: существует непрерывное сопряжение возмущенного диффеоморфизма с некоторым новым косым произведением. Иначе говоря, диффеоморфизм переставляет искривленные слои, — образы слоев косого произведения под действием сопряжения. В теории Хирша—Пью—Шуба послойные отображения после сопряжения зависят от точки базы непрерывно; Антон Городецкий усилил результаты теории, показав, что зависимость гельдерова.

4.1.4 Чем хороши гельдеровы косые произведения

Обозначим через $f_{\omega,k}$ действие $\mathcal{F}^k$ на слой $\{\omega\} \times M$. Очевидно, что

$$f_{\omega,k} = f_{\sigma^{k-1}\omega} \circ ... \circ f_{\sigma\omega} \circ f_\omega.$$

Часть последовательности обозначим через

$$\omega|_a^b = \omega_a \omega_{a+1} ... \omega_b.$$

Оказывается, в гельдеровых косых произведениях можно оценить неточность суперпозиции послойных отображений для близких слоев.

Lemma 4.2. *Пусть $\mathcal{F}$ — гельдерово косое произведение, и последовательности ω и ω' близки: $\omega|_{-k}^{2k} = \omega'|_{-k}^{2k}$. Тогда ограничения $\mathcal{F}^k$ на соответствующие слои близки экспоненциально по k в метрике непрерывных отображений.*

4.1.5 Показатели Ляпунова

Пусть $\mathcal{F}$ — диффеоморфизм, ξ — вектор касательного пространства в точке x. Введем

$$\lambda(x,\xi) = \lim \frac{1}{k} \ln |d\mathcal{F}^k(x)\xi|.$$

Пусть существует $\mathcal{F}$-инвариантная мера μ, и для μ почти всех точек $\lambda(x,\xi)$ принимает лишь конечное число значений при изменении ξ:

$$\lambda_1(x) \geq \lambda_2(x) \geq ... \geq \lambda_n(x).$$

Тогда λ_i — *показатели Ляпунова* отображения $\mathcal{F}$. Вообще говоря, предел может не существовать.

Если мера μ эргодична, то почти всюду показатели Ляпунова не зависят от точки x. Назовем $\mathcal{F}$-инвариантную меру μ *гиперболической*, если для почти всех точек показатели Ляпунова отличны от нуля. В парадигме Палиса есть следующая

Conjecture 4.3. *(метрически) типичная динамическая система обладает SRB-мерой, и в типичном случае SRB-мера гиперболична.*

Неформально говоря, гипотеза утверждает, что в типичной динамической системе траектории экспоненциально быстро разбегаются. Во второй части гипотезы существенно, что мера есть «физическая» SRB-мера. Контрпример для «нефизических» мер доставляет следующая теорема.

Theorem 4.4 (Городецкий, Ильяшенко, Клепцын, Нальский)**.** *В открытом множестве в пространстве диффеоморфизмов существуют инвариантные эргодические негиперболические меры.*

Гипотезу можно сформулировать не упоминая SRB-меру: для типичного диффеоморфизма для почти всех по мере Лебега точек показатели Ляпунова существуют и все отличны от нуля.

4.2 Перемежающиеся бассейны притяжения

В третьей лекции был пример неустойчивого аттрактора Милнора. Приведем пример косого произведения с перемежающимися бассейнами притяжения. Построим косое произведение над диффеоморфизмом Аносова в торе,

$$X = \mathbb{T}^2 \times I,\ F:\ (b,x) \mapsto (Ab, f_b(x)),\ A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Диффеоморфизм Аносова A структурно устойчив, то есть при возмущениях переходит в сопряженный себе. Введем функции, описывающие притяжение к концам отрезка над точкой базы,

$$\varphi_0(b) = \ln f_b'(0),\ \varphi_1(b) = \ln f_b'(1).$$

Предположим, что края многообразия X *в среднем притягивают*, то есть

$$\int_{\mathbb{T}^2} \varphi_j db < 0,\ j = 0, 1.$$

Пусть также послойные отображения квадратичны по x, и существует периодическая точка b_0, такая, что

$$f_0'(0) > 1,\ f'_{A^k b_0}(1) > 1\ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Бассейном притяжения компоненты аттрактора назовем множество точек, которые в будущем притягиваются к этой компоненте. В построенном примере аттрактор Милнора совпадает с границей многообразия X, при этом бассейн каждой из компонент всюду плотен и в окрестности каждой точки положительной меры. Такие бассейны назовем *перемежающимися*.

Подобный пример построил в 1994 году Итаи Кан для косых произведений над удвоением окружности. В 2008 Ильяшенко, Клепцын и Нальский построили открытое множество диффеоморфизмов с перемежающимися бассейнами. Однако все примеры построены для отображений, которые сохраняют край многообразия. Вопрос о существовании локально типичной перемежаемости бассейнов в классе замкнутых многообразий открыт.

5 Holder everywhere

5.1 Holder property

The map $f : X \to Y$ from one metric space to another is said to have Holder property if there exist such $C > 0$ and $\alpha > 0$ that

$$\forall x, y \in X \; d_Y(f(x), f(y)) \leq C_\alpha d_X^\alpha(x, y)$$

α is called a Holder exponent, C_α Holder constant.

Examples

1. $f(x) = |x|^\alpha$
2. Cantor function (Devil's staircase) on $[0, 1]$

Exercise 2. Find Holder constants for the examples above.

5.2 Topological conjugacy of expanding maps

Definition 5.1. Vector fields are topologically equivalent if there exists a homeomorphism that conjugates the phase flows of these fields.

Exercise 3. Prove that stable linear planar node and a focus are topologically equivalent.

We will consider the simplest example of a circle map f_0 that expands all the arcs: a circle doubling map $\varphi \mapsto 2\varphi$, where φ is polar angle of a point x in a circle $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. This map is not invertible but it can be iterated forwards. Let us split the circle into two parts:

$$D_0 = \left\{ \varphi \in [0, \frac{1}{2}) \right\}$$
$$D_1 = \left\{ \varphi \in [\frac{1}{2}, 1) \right\}$$

Consider the space $\Sigma_{2,0}^+$ of one-sided sequences of symbols 0 and 1, having an infinite number of zeros. This space may be identified with the points of the circle: a sequence $\omega_0\omega_1\ldots$ is identified with the real number $0.\omega_0\omega_1\ldots$. The metric is inherited from the circle.

Definition 5.2. The fate of a point $x \in S^1$ under the map f_0 is a sequence $\omega = \omega_0\omega_1\omega_2\ldots$ in Σ_2^+ such that $\omega_k = j \Leftrightarrow {f_0}^k(x) \in D_j, j = 0, 1$. The map $\Phi_{f_0} : S^1 \to \Sigma_2^+$ which brings a point into its fate is called *a fate map.*

Proposition 5.3. *For any $\omega \in \Sigma^+$ with an infinite number of zeroes there is one and only one point $x \in S^1$ such that its fate coincides with w. So Φ_{f_0} is a $1-1$ map from S^1 to Σ_0^+ - a subset of Σ^+, containing the sequences without a tale of ones.*

Let us now consider a nonlinear circle doubling, that is a map $f : S^1 \to S^1$ such that it expands: $f' > 1$ and its lifting F to a real line $\mathbb{R}^1$ has a property

$$F(x+1) = F(x) + 2$$

For such a map a fate map Φ_f can be defined and an analogue of proposition **??** holds. We shall call the maps of S^1 with these properties the map f has 2-expansions of a circle.

Corollary 5.4. *If $\sigma : \Sigma_0^+ \to \Sigma_0^+$ is a standart Bernoulli shift then $\Phi_{f_0,}$ is a topological conjugacy between f_0 and σ. In other words, for any point $x \in S^1$*

$$\Phi_{f_0} \circ f_0(x) = \sigma \circ \Phi_{f_0}(x)$$

The same statement holds for σ and Φ_f also.

The final statement is

Theorem 5.5. *Any 2-expansions f and g of a circle are topologically equivalent, i.e. there exists a homeomorphism $h : S^1 \to S^1$ such that*

$$h \circ g = f \circ h$$

.

5.3 Holder conjugacy

A homeomorphism h conjugating two non-linear expansions f and g of a circle may not be differentiable. However, it's more than continuous. The following theorem holds:

Theorem 5.6. *The conjugacy h has a Holder property with Holder constant equal to* $\alpha = \frac{\ln \lambda}{\ln \mu} < 1$*, where* λ *and* μ *are the constants characterizing the expanding.*

In more details, λ *and* μ *are chosen in such a way that* $1 < \lambda < |f'| < \mu, \lambda < |g'| < \mu$*.*

Proof 5.1. The aim is to prove the Holder property for h, that is to show that there exists a constant $C > 0$ such that $\forall\ x, y \in S^1$: $d(h(x), h(y)) \leq Cd^\alpha(x, y)$.

Fix some $\varkappa \in (0, \frac{1}{2\mu})$ and note that for all $x, y : d(x, y) > \varkappa$ the fraction $\frac{d(h(x),h(y))}{d^\alpha(x,y)}$ is bounded from above by $\frac{\max d(h(x),h(y))}{\varkappa^\alpha} \leq \frac{1}{\varkappa^\alpha}$. So for points which are uniformly far away from each other the Holder property holds for any continuous function.

Let us take points $x, y \in S^1$ such that $d(x, y) < \varkappa$. By iterating f, we increase the distance between the images of initial points. So there exists an iteration k such that the images $X = f^k(x)$ and $Y = f^k(y)$ are considerably far away from each other: $d(X, Y) > \varkappa$. For X, Y the Holder property holds:

$$d(h(X), h(Y)) \leq Cd^\alpha(X, Y)$$

Since h is a conjugacy, $h \circ f^k = g^k \circ h$, then we can rewrite $h(X) = g^k \circ h(x)$ and $h(Y) = g^k \circ h(y)$. Using also the estimates on expansion of f and g, we can establish the following chain of inequalities:

$$d(h(x), h(y))\lambda^k \leq d(g^k \circ h(x), g^k \circ h(y)) = d(h(X), h(Y)) \leq Cd^\alpha(X, Y) \leq \\ \leq C\mu^{k\alpha} d^\alpha(x, y)$$

α was chosen to satisfy the equation $\mu^\alpha = \lambda$. The left-hand side and the right-hand side of the chain of inequalities give the desired estimate.

The theorem **??** was obtained by Anosov for all the hyperbolic maps (reference: Katok-Hasselblat (?)):

Theorem 5.7. *A homeomorphism conjugating two hyperbolic maps, has a Holder property.*

The idea of the proof of this more general theorem is the same as in **??**: the estimates have to be given on unstable and stable manifolds of a map. Nevertheless, there have to be some assumptions on the uniform bound of an angle between the invariant foliations.

5.4 Skew products and their perturbations

The case of skew products and their perturbations continues the idea of Holder conjugacies: indeed, after the perturbation of a skew product a new diffeomorphism is obtained. This diffeomorphism may not be a skew product, but there is a topological equivalence H of this diffeomorphism to a skew product. However, H won't be smooth, but only in fact Holder.

5.4.1 A skew product

Let a phase space X be a Cartesian product $X = \mathbb{T}^2 \times M$ of a torus and some closed manifold. Let us study a skew product

$$\mathcal{F} : X \to X, (b, x) \mapsto (h(b), f_b(x)) \tag{5.1}$$

where b is a point on the torus, and x is a point on M. We will call the diffeomorphisms $f_b(x)$ parametrized by the points of the torus *fiber-maps* and we suppose that f_b depends smoothly on b. To simplify, let us think that h is a linear Anosov map of $\mathbb{T}^2$. Let λ and μ be its eigenvalues, $0 < \lambda < 1 < \mu$.

Obviously, the following proposition holds:

Proposition 5.8. *For a skew-product* **??** *there exists a projection π which is a semi-conjugacy of $\mathcal{F}$ and a mapping in the base h. In other words, for any $P = (x, b) \in X$*

$$\pi(\mathcal{F}(P)) = h(\pi(P))$$

Here $\pi(b, x) = b$ and therefore π is not invertible.

5.4.2 A perturbed skew product

Now let us consider the perturbation of $\mathcal{F}$ in C^1-metric. There are many natural questions which arise regarding such perturbation. A theory of Hirsch, Pugh and Shub (1977, link (?)) answers to some of them under the assumptions of partial hyperbolicity. In the case of a skew product they appear in a form of dominated splitting condition.

Definition 5.9. Let us say that a skew-product **??** satisfies the *dominated splitting condition* with $\lambda < \lambda^+ < 1 < \mu^- < \mu$ provided that

$$\forall v \in T_x M, |v| = 1 : \lambda^+ \leq |df_b v| \leq \mu^-, \tag{5.2}$$

and h is hyperbolic with the hyperbolicity constants λ and μ. The dominated splitting condition means that contraction and expansion in the base B dominate contraction and expansion in the fiber.

The theorem about skew products which rises from HPS-theory establishes the fact that after a perturbation a foliation survives, and the conjugacy between a perturbed mapping and the initial base map h still exists.

Theorem 5.10. *Consider a skew product* (**??**) *on a compact manifold X satisfying* (**??**) *and take its C^1-small perturbation $\mathcal{G}$.*

Then there exists a foliation of X, that is invariant under $\mathcal{G}$ and a map $\widetilde{\pi} : X \to B$ which is a semi-conjugacy between $\mathcal{G}$ and h. In other words, for any $P \in X$

$$\widetilde{\pi}(\mathcal{G}(P)) = h(\widetilde{\pi}(P))$$

.

Denote the perturbed fibers by $M_b = \widetilde{\pi}^{-1}(b)$. For them the following holds:
(a). Each fiber is C^1-smooth.
(b). M_b continuously depend on b.

Eventually, in his dissertation (2001) published in 2006 A. Gorodetskij has proven

Theorem 5.11. *M_b is with respect to b Holder-continuous.*

In 2010 Ilyashenko and Negut[?] obtained explicit estimates on the Holder exponent.

Let us remark that this theorem doesn't follow from the following result, obtained earlier:

Theorem 5.12 (Shub, Pugh, Wilkinson)**.** *The tangent spaces of the central fibers depend Holder-continuously on b.*

Indeed, if these fibers have dimension one, they are the phase curves of a differential equation with a Holder-continuous right-hand part. A simple example $\dot{x} = x^{\frac{1}{3}}$ shows, that in Holder case even the uniqueness doesn't hold.

The most recent result in this domain was given in a preprint [**?**] of 2011 by C. Pugh, M.Shub and A.Wilkinson. To state this result, we have to revise the definition of partially hyperbolic diffeomorphism.

5.5 Holder foliations: revisited

In their paper Pugh, Shub and Wilkinson consider a diffeomorphism of a manifold which may not be a Cartesian product. They prove that for a partially hyperbolic diffeomorphism $\mathcal{G}$ with compact central fibers with uniformly bounded volume its perturbation preserves a foliation, and the perturbed fiber depends Holder-continuously on an initial condition. The estimate on a Holder constant is also given.

Remark 5.13. The conditions of plaque expansivity and dynamical coherence are also demanded, but there is a hope that the theorem holds even without them.

5.5.1 Partial hyperbolicity

Let $\mathcal{G}$ be a C^1-diffeomorphism of a compact manifold X onto itself.

Definition 5.14. $\mathcal{G}$ is said to be *partially hyperbolic* if for any point $P \in X$ its tangent space $T_P X$ can be represented as a direct sum of three sub-bundles

$$T_P X = E^s_P \oplus E^c_P \oplus E^u_P = E(P)$$

which have these properties:

(a) For any P the sub-bundles E^s_P, E^c_P and E^u_P are invariant:

$$d\mathcal{G} : E(P) \to E(\mathcal{G}(P))$$

(b) $E(P)$ depends continuously on P.

(c) The dynamics on a central bundle is weaker than dynamics on $E^s \oplus E^u$:

Formally, there exist numbers four numbers with following properties: $\lambda < \lambda^+ < \mu^- < \mu, 0 < \lambda < 1 < \mu$ such that for any $v \in TX, |v| = 1$ and $u = d\mathcal{G}(v)$

$$v \in E^s_P \Longrightarrow |u| < \lambda, v \in E^u_P \Longrightarrow |u| < \mu, v \in E^c_P \Longrightarrow |u| \in [\lambda^+, \lambda^-] \quad (5.3)$$

Example 5.15. *A skew-product* (**??**) *with a dominating splitting condition* **??** *serves as an example of a partially hyperbolic diffeomorphism.*

5.5.2 Existence of invariant foliations

Hirsch, Pugh and Shub as well as Brin and Pesin obtained important results being in some way a generalization of Hadamard-Perron theorem for partially hyperbolic diffeomorphisms[?].

Theorem 5.16. *For any partially hyperbolic diffeomorphism $\mathcal{F}$ on a compact manifold the distributions(?) E^s and E^u are integrable, i.e. there exist invariant by $\mathcal{G}$ foliations $\mathcal{W}^s$ and $\mathcal{W}^u$ tangent to E^s and E^u.*

Remark 5.17. Note that E^c may not be integrable. (see Smale example, Pesin's book [?])

5.5.3 Compact foliations

Question 4. Let us consider a vector field with closed phase curves. Does the continuous first integral exist?

The answer was negative and given by Sullivan in (?)

Definition 5.18. The compact foliation $\mathcal{F}$ is said to have uniformly bounded volume, if there exists a constant V such that for any leaf F of a foliation its volume is less than V.

Example 5.19. *There exists a foliation of $(\mathbb{R}^5, 0)$ by circles without a first integral and this foliation doesn't have a uniformly bounded volume.*

Remark 5.20. For dim = 3 there is no such example (proven by (?)), for dim = 4 such an example was constructed by D.Epstein later.

Let us state one theorem

Theorem 5.21 (D. Epstein)**.** *Consider a foliation of a compact manifold such that its leaves are compact and have the uniformly bounded volume. Then, all the leaves have uniformly small foliated neighborhoods.*

In other words, for any fixed leaf F in a foliation such a picture is forbidden, see fig. **??**. (???) The sequence of leaves approaching to one point on a leaf can't stay away from this leaf near another point on the same leaf.

5.5.4 Main theorem

All the definitions given, let us state the main theorem:

Theorem 5.22 (Pugh, Shub, Wilkinson, 2011)**.** *Let us consider a foliation $\mathcal{F}$ of a compact manifold and a diffeomorphism $\mathcal{G}$ preserving this foliation with the following properties:*

(a). $\mathcal{G}$ is a partially hyperbolic diffeomorphism with respect to $\mathcal{F}$: the central bundle of $\mathcal{G}$ is $T\mathcal{F}$, i.e. $\mathcal{W}^c = \mathcal{F}$.

(b). The leaves of $\mathcal{F}$ are compact manifolds.

(c). The foliation $\mathcal{F}$ has a uniformly bounded volume.

(d). (Technical assumptions) Foliation $\mathcal{F}$ is plaque expansive and dynamically coherent with respect to a diffeomorphism $\mathcal{G}$.

Under these assumptions, the following holds:

There exist uniform constants $C > 0$ and α that the holonomy map Δ defined by $\mathcal{F}$ is Holder and the Holder constant α could be explicitly written.

We will give a main idea of the proof of this deep theorem, which is similar to the idea of the simple theorem **??**.

Proof 5.2. First, since the central foliation is given, E^{cu} and E^{cs} are integrable. We will prove that holonomy Δ is *Holder continuous only for a leaf of a foliation* $\mathcal{W}^{cu}$ (see picture **??**). Analogously, the Holder property can be proven for $\mathcal{W}^{cs}$ and then obtained by intersection (for more details, see [**?**]).

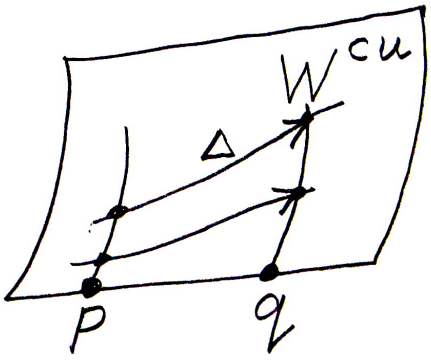

Рис. 5.1: A holonomy map in cental-unstable leaf

Let us define the constants μ and ν estimating the expansion on $\mathcal{W}^u$: for $v \in E^u, ||v|| = 1$ holds

$$\nu < ||d\mathcal{G}v|| < \mu$$

We claim that the holonomy along a path τ on the leaf F in $\mathcal{W}^{cu}$ in $\mathcal{W}^{cu}$ is α-Holder with $\alpha : \mu^\alpha = \nu$, see fig. **??** Here $\tau(0) = p, \tau(1) = q$. If Holder property doesn't hold then there exists a sequence of points s_k converging to a point p in a leaf and violating the Holder property:

$$C_k = \frac{d(\Delta(s_k), q)}{d^\alpha(s_k, p)} \to \infty, k \to \infty$$

Let us choose the numbers n_k, corresponding to the iterations of $\mathcal{G}$ such that $d(\mathcal{G}^{n_k}(\Delta(s_k)), \mathcal{G}^{n_k}(q)) \in (\varkappa, \mu\varkappa)$ where $\varkappa > 0$ is fixed. Let us use the estimates on expansion and contraction for a chain of inequalities:

$$d^\alpha(\mathcal{G}^{n_k}(s_k), \mathcal{G}^{n_k}(p)) \le d^\alpha(s_k, p)\mu^{n_k\alpha} = \frac{d(\Delta(s_k), q)\nu^{n_k}}{C_k} \le p$$
$$\le \frac{d(\mathcal{G}^{n_k}(\Delta(s_k)), \mathcal{G}^{n_k}(q))}{C_k} < \frac{\mu\varkappa}{C_k} \to 0$$

Informally, we choose the iterations n_k of $\mathcal{G}$ such that the starting points of the pathes still stay close to each other (and to p) while the end points stay away from the leaf (see picture **??**). From here, the contradiction with theorem **??**.

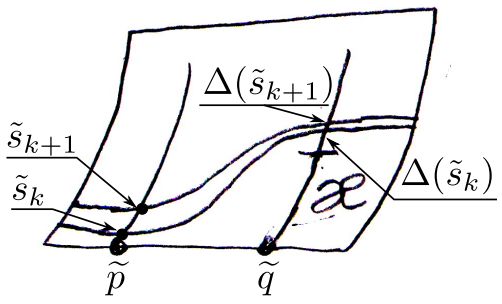

Рис. 5.2: The starting points s_k stay close to p while the end points $\Delta(s_k)$ do not approach the leaf under the chosen iterations $\mathcal{G}^{n_k}$: on the picture for any point x by $\widetilde{x}$ we assume $\mathcal{G}^{n_k}(x)$

6 Толстые аттракторы и строгая эргодичность

6.1 «Большие» аттракторы

Несложно привести пример типичного диффеоморфизма с аттрактором Милнора полной меры. Действительно, у линейного диффеоморфизма Аносова на торе нет поглощающих областей, и орбита почти любой точки всюду плотна под его действием, поэтому $A_{max} = A_M = \mathbb{T}^2$ и $mes(\mathbb{T}^2 \backslash A_M) = 0$.

Кажется привычным, что если A_M отличен от всего фазового пространства, то $intA_M = \emptyset$. Более того, для диффеоморфизмов многообразий без края как правило $mesA_M = 0$.

Problem 6.1 (Бонатти, Диас, Абденур)**.** Верно ли, что если для типичного диффеоморфизма замкнутого многообразия аттрактор Милнора обладает непустой внутренностью, то он совпадает со всем многообразием?

Ответ для типичного диффеоморфизма неизвестен, однако для большого класса диффеоморфизмов предположение верно.

Definition 6.2. Гомоклиническим классом периодической орбиты назовем замыкание ее гомоклинических точек.

Theorem 6.3 (Авторы?)**.** *Если у отображения конечное число гомоклинических классов, то предположение проблемы 7.1 верно.*

В окрестности примера Ньюхауса можно построить локально топологически типичные диффеоморфизмы со счетным числом гомоклинических классов, поэтому теорема не дает ответа на вопрос для типичных диффеоморфизмов. Возможно, что типичны аттракторы положительной меры, не совпадающие со всем пространством.

Definition 6.4. Аттрактор Милнора положительной, но не полной меры назовем толстым.

Definition 6.5. Толстый аттрактор Милнора с непустой внутренностью назовем очень толстым.

6.2 Толстые аттракторы

Problem 6.6. Верно ли, что толстые аттракторы локально типичны?

Теорема из предыдущего раздела утверждала, что очень толстые аттракторы нетипичны среди диффеоморфизмов с конечным числом гомоклинических классов. Возможно, технику теоремы можно применить и к просто толстым аттракторам.

Локальная типичность толстых аттракторов Милнора для диффеоморфизмов замкнутых многообразий не установлена.

Theorem 6.7 (Ю.С. 2011)**.** *В пространстве диффеоморфизмов многообразий с краем толстые аттракторы локально типичны.*

Схему доказательства подобной теоремы для ступенчатого косого произведения приведем в четвертой части лекции. В гладком случае доказательство становится намного сложнее. При этом вне класса диффеоморфизмов толстые аттракторы локально типичны.

6.3 Толстые аттракторы эндоморфизмов

Theorem 6.8 (Денис Волк, неопубликована)**.** *Существует открытое множество косых произведений над эндоморфизмом окружности с очень толстым аттрактором Милнора.*

Theorem 6.9 (Tsuji, 2005)**.** *Для косых произведений над эндоморфизмом окружности открытое множество образуют отображения, SRB-мера которых абсолютно непрерывна относительно меры Лебега.*

По определению SRB-меры, $mes_{SRB} A_M > 0$, поэтому $mes_{leb} A_M > 0$ для отображений в теореме Тсуджи. Но, вообще говоря, из теоремы Тсуджи не следует теорема Дениса Волка.

6.4 Как строятся толстые аттракторы?

Приведем пример типичного ступенчатого «сохраняющего край» косого произведения с толстым аттрактором. Пусть

$$X = \Sigma^2 \times I,\ F : (\omega, x) \mapsto (\sigma\omega, f_{\omega_0} x),$$

$$f_{0,1} = 0, \quad f_{0,1} = 1, \quad f'_{0,1}(1) > 1, \quad f'_0(0) < 1,$$

и пусть нуль в среднем отталкивает, то есть $f'_0(0)f'_1(0) > 1$.

(картинка с послойными отображениями и картинка с как бы поглощающей областью)

Для указанных послойных отображений область $X' = \Sigma^2 \times [0, 1-\varepsilon]$ поглощающая, определим для нее максимальный аттрактор $A_{max} = \bigcap F^k X'$.

Exercise 5. Существует «граничная» функция $\sigma^+ : \Sigma^2 \to I$, такая что
1) $A_{max} = \{\{\omega\} \times [0, \sigma^+(\omega)] \mid \omega \in \Sigma^2\}$.
2) σ^+ положительна почти всюду.
3) Множество нулей σ^+ всюду плотно.

Из первых двух утверждений следует, что аттрактор толстый. Из третьего следует, что он не может быть очень толстым. В построении примера все условия открыты, поэтому пример выдерживает малое шевеление в классе ступенчатых косых произведений. Верна

Theorem 6.10. *В построенном примере $A_{max} = A_M$.*

В статье Ю.С. 2011 (ссылка) доказан более сложный результат для диффеоморфизмов

Theorem 6.11. *Толстый аттрактор Милнора типичен в сохраняющих край диффеоморфизмах $\mathbb{T}^2 \times I$.*

Доказательство этой теоремы намного сложнее доказательства в ступенчатом случае. Возможно, существует более простое доказательство через теорию нормальных форм, но самостоятельной теории нормальных форм косых произведений пока не существует.

6.5 Нормальные формы косых произведений

(картинка со слоями-отрезками, которые растут из базы-прямоугольника)
Рассмотрим косое произведение

$$F : (b, x) \mapsto (Ab, f_b(x))$$

с условием $f_b(0) = 0$. Обозначим $\lambda(b) = f'_b(0)$.

Что может дать теория нормальных форм, если F рассматривать как диффеоморфизм? Точка $(0,0)$ неподвижна, заменой координат в ее окрестности можно свести отображение к линейному. Новое косое произведение будет переставлять слои, параллельные новой «вертикальной оси», таким образом преобразование теряет исходную структуру косого произведения с вертикальными слоями. Мы же хотим сохранить структуру косого произведения с вертикальными слоями. Будем искать замену координат, тождественную по базе. Нормализующее преобразование и отображение под его действием имеют вид

$$H(b,x) = (b, h_b(x)),\ (b,x) \mapsto (Ab, \lambda(b)x).$$

Плата за сохранение исходной структуры косого произведения — потеря гладкости, h_b оказывается гельдерово зависящим от точки в базе. В пятой лекции описана техника, позволяющая работать с гельдеровыми косыми произведениями.

6.6 Сильная эргодичность относительно инвариантной меры

Динамическая система с инвариантной мерой μ эргодична, если для любой непрерывной функции временное среднее почти всюду совпадает с пространственным. Пусть $\bar{\varphi}$ — временное среднее функции φ. Назовем *исключительным* множество точек, в которых временное среднее не совпадает с пространственным. Для динамической системы (f, X, μ) с инвариантной вероятностной мерой μ назовём исключительным множеством объединение исключительных множеств по всем непрерывным функциям на X.

Exercise 6. У эргодической динамической системы исключительное множество обладает нулевой мерой.

Попробуем сказать больше об исключительном множестве эргодического отображения. Скажем, что временное среднее функции «κ не совпадает» с пространственным, если, грубо говоря,

$$|\bar{\varphi} - \int \varphi| > \kappa.$$

Точнее, обозначим

$$K_{\kappa,\varphi} = \{x| \ \bar{\lim}_n |\bar{\varphi}_n - \int \varphi d\mu| \geq \kappa\}.$$

Definition 6.12. Назовем динамическую систему (f, X, μ) *сильно эргодической*, если

$$\dim_H K_{\kappa,\varphi} < \dim X, \ \forall \varphi \in C(X), \forall \kappa > 0.$$

Из определения следует, что исключительное множество сильно эргодического отображения может быть представлено в виде счетного объединения множеств меньшей хаусдорфовой размерности, при этом размерность исключительного множества может совпадать с размерностью пространства. Но не любое множество нулевой меры может быть исключительным множеством сильно эргодического отображения.

Exercise 7. Приведите пример множества нулевой меры, не представимого в виде счетного объединения множеств меньшей хаусдорфовой размерности.

Более того, всякое подмножество отрезка нулевой меры может быть реализовано как исключительное множество некоторой динамической системы, возможно не эргодической. Пример впервые построил Рыжов (диссертация, 2012). В следующей части приведем значительно более простой пример подобного отображения.

Теоремы о сильной эргодичности доказаны для некоторых специальных классов отображений. Показана сильная эргодичность для удвоения окружности, для диффеоморфизма Аносова на торе (Салтыков). Последний результат обобщает следующая теорема.

Theorem 6.13 (Клепцын, Рыжов)**.** *Гиперболические отображения сильно эргодичны относительно SRB-меры.*

6.7 Пример динамической реализации произвольного множества нулевой меры

Пусть задано множество K на отрезке — нулевой меры и замкнутое. Например, канторово. Определим на отрезке 1-гладкую функцию f следующим образом: на K она равна 0, а вне K эта функция больше 0 (см. рис **??**).

Рис. 6.1: Канторово множество и функция f на нем

Свернем отрезок в окружность. Получим функцию f на окружности. Теперь построим искомый диффеоморфизм F на диске следующим образом. Радиусы в диске являются инвариантными множествами. На каждом радиусе действует свое отображение. Для описания их нам потребуется два отображения отрезка, из которых они конструируются.

Первое отображение отрезка — тождественное, а второе, назовем его g, все точки интервала гонит вниз, сохраняя только концевые неподвижными, при этом производные g в концах отрезка равны 1.

Теперь действие отображения F задается формулой:

$$(x,t) \mapsto (1-f(t))x + f(t)g(x),$$

где x — координата по радиусу, а t — аргумент на окружности (функция f там и определена). Отображение F действует как на рисунке **??**. Нетрудно видеть, что в центре диска отображение непрерывно и гладко, и более того, край диска можно заклеить одной точкой (компактифицировать), превратив отображение диска в отображение сферы, что мы и сделаем в конце построения.

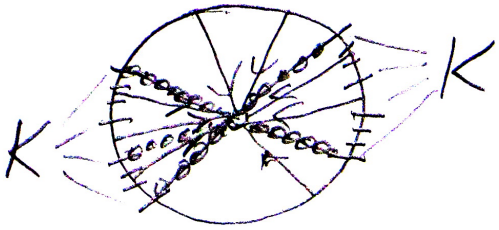

Рис. 6.2: Динамическая реализация

SRB-мера отображения F сидит в центре диска, потому что почти любая по мере Лебега орбита имеет омега-предельным множеством центр диска, а значит, для любой непрерывной функции почти все по мере Лебега орбиты имеют пространственное среднее равным значению в центре

диска. А это и значит, что центр диска — носитель SBR-меры. С другой стороны, каждая из точек, имеющих аргумент из K, неподвижна, и ее пространственное среднее, вообще говоря, не совпадает со значением в центре диска. Поэтому, если выбрать K полной хаусдорфовой размерности, то мы получим отображение диска, у которого в множестве полной хаусдорфовой размерности каждая орбита имеет пространственное среднее, не совпадающее со средним по SRB-мере.

Если нужно многообразие без края, осталось только заклеить диск по краю, как уже было сказано.

7 Кошмар Фубини и его преодоление

7.1 Разное

Мысли о хирургической замене гиперболического седла на подкову Смейла.

7.2 Кошмар Фубини

Рассмотрим косое произведение с тождественными послойными отображениями над диффеоморфизмом Аносова в торе.

$$\mathcal{F}: \ \mathbb{T}^2 \times S^1 \to \mathbb{T}^2 \times S^1, \ \mathcal{F} = (A, id).$$

Пусть $\mathcal{G}$ — малое возмущение $\mathcal{F}$ в классе диффеоморфизмов трехмерного тора. Теория Хирша–Пью–Шуба и результаты Антона Городецкого говорят, что $\mathcal{G}$ гельдерово сопряжено с новым косым произведением. Отображение $\mathcal{G}$ переставляет кривые гладкие слои M_b, гельдерово зависящие от точки базы b. (см рисунок с кривым цилиндром)

Theorem 7.1 (Кошмар Фубини)**.** *Для некоторого $\mathcal{G}$ существует множество E положительной меры в трехмерном торе, которое пересекает каждый слой M_b по конечному числу точек.*

Множество, пересекающее каждый слой по конечному числу точек, не может обладать полной мерой, если голономия вдоль слоения абсолютно непрерывна, однако после гельдерова сопряжения это свойство может не сохраниться. Первым эффект открыл Каток. Он обнаружил, что голономия вдоль слоев, которые гельдерово зависят от точки базы, может не быть абсолютно непрерывной. Каток построил пример слоения квадрата и множества полной меры, которое пересекало каждый слой по одной точке. Первую динамическую реализацию кошмара Фубини построили Шуб и Уилкинсон.

7.3 Следствия гельдеровости

(картинка с парой цилиндров и картинка с проекциями на базу. Между цилиндрами сопряжение H) Пусть сопряжение H сохраняет сечение $x = const$

$$H \ : (b, x) \mapsto (\beta_b(x), x),$$

в силу гельдеровой зависимости слоя от точки базы сопряжение будет гельдеровым. Тогда слой M_b — график отображения слоя на базу

$$M_b = \{(x, \beta_b(x))|\ x \in M\}.$$

Пусть B — база косого произведения $\mathcal{F}$, π — проекция $\mathcal{F}$ на B, p — проекция $\mathcal{G}$ на B. Рассмотрим подмножество K базы B, $\mu K = 0$. Тогда $\pi^{-1}K$ — насыщение K слоями, и $m_3(\pi^{-1}K) = 0$. Что можно сказать о мере $p^{-1}K$? Отображение H сопрягает диффеоморфизмы, поэтому

$$p^{-1}K = H\pi^{-1}K,$$

однако сопряжение H только гельдерово и может не сохранить нулевую меру. Примером не сохраняющего меру гельдерова отображения может служить канторова лестница. Обратное к лестнице отображение переводит множество положительной меры в множество нулевой меры.

7.4 Размерность Хаусдорфа

Гельдеровы отображения не сохраняют меру Лебега, но уважают хаусдорфову размерность множеств.

Lemma 7.2 (Лемма Фальконера)**.** *Пусть $K \subset B$, и $\varphi :\ B \to B$ гельдерово с показателем α. Пусть*

$$\dim_H K = d < \dim B,\ \frac{d}{\alpha} < \dim B,$$

тогда $\dim_H \varphi(K) \leq \frac{d}{\alpha} < \dim B$.

Exercise 8. Докажите лемму Фальконера.

Покажем, как хаусдорфова размерность помогает в случае гельдерового сопряжения. Пусть множество E нулевой меры пересекает каждое сечение $x = const$ косого произведения $\mathcal{F}$ по множеству не только нулевой меры, но и не полной хаусдорфовой размерности. Пусть также показатель гельдеровости отображения $H :\ \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ близок к единице. Отображение H сохраняет сечения $x = const$, поэтому из леммы Фальконера следует, что в $\mathcal{G}$ образ $H(E)$ пересекает каждое сечение по множеству неполной хаусдорфовой размерности. Осталось проинтегрировать нулевые меры множеств $H(E) \bigcap \{x = const\}$ по всем сечениям.

Exercise 9. Покажите, что $dim_H K \times [0,1] = dim_H K + 1$. Вообще говоря, неверно, что хаусдорфова размерность прямого произведения множеств равна сумме их хаусдорфовых размерностей.

7.5 Сильная эргодичность

Мы по-прежнему рассматриваем косые произведения. Пусть A — диффеоморфизм Аносова двумерного тора или другое сильно эргодическое преобразование. Обозначим через K множество точек базы, в которых временные средние непрерывных функций для A отличаются от пространственных более чем на κ:

$$K = \{b | \bar{\varphi}(b) - \int \varphi | \geq \kappa > 0\}$$

Специальные эргодические теоремы утверждают, что хаусдорфова размерность K строго меньше размерности базы. При достаточно малом гладком возмущении $\|\mathcal{F} - \mathcal{G}\|_{C^1}$ отображение H будет гельдерово с коэффициентом α, $|1 - \alpha| << 1$, поэтому по лемме Фальконера у образа K хаусдорфова размерность также будет меньше размерности базы. Поэтому

$$dim_H p^{-1}K < dim B \times M, \ \Rightarrow \ m_3 p^{-1}K = 0.$$

При уменьшении κ размерность K возрастает, поэтому, если мы хотим сохранить хаусдорфову размерность $p^{-1}K$, необходимо уменьшать возмущение $\|\mathcal{F} - \mathcal{G}\|_{C^1}$, а вслед за ним и модуль $|1 - \alpha|$.

8 Пузыри

8.1 Построение Арнольда

Definition 8.1. Риманова поверхность - это одномерное комплексное многообразие, то есть множество, покрытое атласом окрестностей, каждая из которых отображается на единичный круг $\{|z| < 1\}$, а функции перехода биголоморфны.

Definition 8.2. Эллиптическая кривая - риманова поверхность рода 1.

Example 8.3. *Простейший пример эллиптической кривой представляет собой тор $\mathbb{T}^2 = \mathbb{C}/\mathbb{Z} + i\mathbb{Z}$ с перенесенной на него с комплексной прямой комплексной структурой. Заметим, однако, что вместо склеивания сторон квадрата, можно произвести склеивание сторон параллелограмма, а именно рассмотреть*

$$\mathbb{T}_\mu = \mathbb{C}/\mathbb{Z} + \mu\mathbb{Z} \tag{8.1}$$

где $\mu \in \mathbb{H}^+$ - комплексный вектор в верхней полуплоскости. Число μ будем назвать модулем эллиптической кривой $\mathbb{T}_\mu$

Example 8.4. *Рассмотрим кольцо в $\mathbb{C}$, а именно множество $K = \{|\nu| < |z| < 1\}$, где $\nu \in \mathbb{C}, |\nu| < 1$. Рассмотрим отображение $z \mapsto \nu z$, и склеим кольцо K с помощью этого отображения ($z \sim \nu z$). Получится некоторая вещественно двумерная поверхность. На самом деле, это будет эллиптическая кривая.*

Exercise 10. (a). Как определить комплексную структуру на этой поверхности?

(b). Докажите, что ее модуль есть $\mu = \frac{\ln \nu}{2\pi i}$

12 вниз

В. И. Арнольд предложил конструкцию, которая по произвольному диффеоморфизму окружности строит семейство эллиптических кривых. А именно, пусть f - аналитический диффеоморфизм окружности $\{|z| = 1\}$ на себя. Обозначим $f_\nu(z) = \nu f(z)$. Пусть $|\nu| < 1$; склеим точки z и $f_\nu(z)$, получая при этом снова эллиптическую кривую (см. рис. **??**). Эта кривая биголоморфно эквивалентна некоторой стандартной эллиптической кривой $\mathbb{T}_\lambda$; обозначим её модуль через λ.

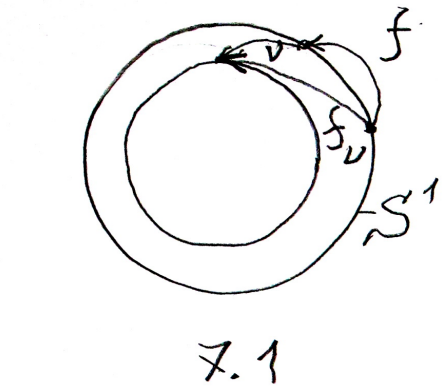

Рис. 8.1: Конструкция Арнольда: построение эллиптической кривой

Таким образом, при фиксированном диффеоморфизме f, получаем отображение $\lambda = \lambda(\nu)$ из внутренности единичного круга в себя. Это отображение мы будем называть *отображением модулей*. Идея состоит

в том, что в поведении отображения модулей содержится богатая информация об отображении f.

Сформулируем проблему, значительные продвижения в которой были получены в 2011 году Н. Гончарук и К. Бюффом:

Problem 8.5. Какие граничные значения принимает отображение модулей?

Exercise 11. Какое будет отображение модулей, когда f - поворот?

Итак, нас интересует то, как отображение модулей действует на границе единичного диска. Обозначим как $\rho(\nu)$ число вращения отображения отображения f_ν при $|\nu| = 1$.

Theorem 8.6 (Н.Гончарук, К. Бюфф, 2011)**.** *Отображение модулей непрерывно продолжается до границы комплексного диска и при этом:*

(a). Если f_ν не является гиперболическим отображением, то $\lim \lambda(\nu) = \exp 2\pi i\rho(\nu)$ *при ν, стремящемся к границе диска*

(b). Если f_ν - гиперболическое отображение, то $\lim \lambda(\nu)$ *при ν, стремящемся к границе диска существует, однако лежит строго внутри единичного круга*

Отсюда, образ границы диска есть единичная окружность с расположенными внутри диска замкнутыми кривыми, прикрепленными к корням из единицы — своеобразными пузырями) (см. **??**). Впервые эту картинку предсказал Р. Федоров, поэтому иногда эти пузыри называют *пузырями Федорова.*

8.2 Шаги доказательства теоремы

Definition 8.7. $\alpha \notin \mathbb{Q}$ - диофантово, если оно плохо приближается рациональными числами, а именно $|\alpha - \frac{p}{q}| > \frac{C}{q^3}$

Lemma 8.8 (В. Молдавский, 2001)**.** *Если $\rho(\nu) \notin \mathbb{Q}$ - диофантово, то* $\lim \lambda(\nu) = \exp(2\pi i\rho(\nu)$ *при ν, стремящемся к границе диска*

Lemma 8.9 (Н. Гончарук, 2011, J. la Croix)**.** *Если f_ν - параболическое, то* $\lim \lambda(\nu) = \exp 2\pi i\rho(\nu)$

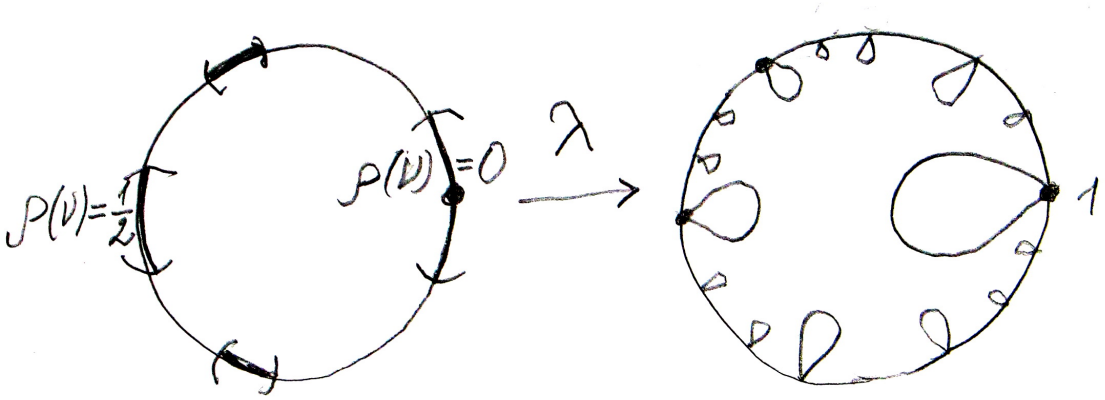

Рис. 8.2: Образ границы единичного диска при отображении модуля

Lemma 8.10 (Н. Гончарук, К.Бюфф, 2011)**.** *Если f_ν - гиперболическое, то существует* $\lim \lambda(\nu)$*, при приближении ν к границе диска. При этом предел попадает внутрь единичного диска и $\lambda(\nu)$ аналитически продолжается в окрестность точки ν.*

Proof 8.1. Идея доказательства данной леммы состоит в конструкции, впервые появившейся в работах Рислера, предложенной К.Бюффом и модифицированной Н. Гончарук: а именно, если, к примеру, рассматривается северо-южное отображение окружности f_ν, $|\nu| = 1$, то стандартное построение Арнольда не работает, поскольку нет кольца, которое можно было бы склеить. Поэтому в окрестнсоти окружности, в которой отображение f биголоморфно, выбирается замкнутая кривая γ, состоящая из двух дуг, γ_1, γ_2. Дуги γ_1 и γ_2 лежат в окрестности аттрактора, в которой отображение f_ν линеаризуется; дуги γ_2 и $f_\nu(\gamma_2)$ лежат в аналогичной окрестности репеллера. Кривые γ и $f_\nu(\gamma)$ ограничивают кольцо; склеивая их по отображению f_ν, получаем эллиптическую кривую $T(\nu)$. При малом изменении ν эта кривая мало меняется; её модуль аналитически зависит от ν (см. рис. **??**). Поскольку f аналитично, можно продолжить f в окрестность окружности. При рассмотрении ν, $|\nu| < 1$ репеллер N и аттрактор S немного сместятся, однако полученная эллиптическая кривая будет биголоморфно эквивалентна кривой, полученной построением Арнольда.

Таким образом, получена голоморфная функция в единичном круге,

Рис. 8.3: Конструкция Бюффа (ПЕРЕРИСОВАННАЯ КАРТИНКА)

у которой известны некоторые радиальные пределы. Пределы есть при стремлении ν к граничным точкам, для которых число вращения $\rho(\nu)$ рационально (**??**, **??**) или $\rho(\nu)$ диофантово (**??**). Таким образом, радиальные пределы существуют для всех ν помимо тех, при которых $\rho(\nu)$ лиувиллево.

Theorem 8.11 (Tsujii)**.** *Мера множества тех точек ν на окружности, для которых $\rho(\nu)$-лиувиллево, равна нулю.*

Таким образом, из лемм при **??**, **??**, **??** и теоремы **??** следует, что п.в. по мере Лебега на S^1 определена функция $L(\nu) = \lim \lambda(r\nu), \nu \in S^1, r \to 1-0$

Lemma 8.12 (Основная лемма)**.** *Функция $L(\nu)$ продолжается непрерывно на S^1 мультипликативным числом вращения* $\exp(2\pi i\rho(\nu))$ *для лиувиллевых чисел вращения.*

Для доказательства этой леммы нужно, в частности, показать, что если последовательность точек, в которых число вращения - рационально, стремится к точке, где оно иррационально, то последовательность пузырей в этих точках уменьшается в размерах. Это действительно верно, а именно, имеет место следующая лемма.

Lemma 8.13. *Диаметр пузыря, соответствующего числу вращения $\frac{p}{q}$ равномерно ограничен сверху величиной $\frac{C}{q^2}$, где константа C зависит только от отображения f. Сам пузырь расположен в диске радиуса $\frac{C}{q^2}$, касающемся единичной окружности в точке $e^{2\pi ip/q}$.*

Итак, в итоге из **??** можно получить, что $L(\nu)$ непрерывна в иррациональных точках, а также в точках, где f_ν гиперболично. Однако f_ν может быть параболическим, при этом параболические точки могут появляться внутри интервалов гиперболичности. Этот случай является технически самым сложным. Его рассмотрение заканчивает доказательство основной леммы.

8.3 Доказательство основной леммы

В прошлом разделе были сформулированы некоторые идеи доказательства основной леммы. Здесь мы его завершим.

Lemma 8.14. *Функция $\lambda(\nu)$ продолжается непрерывно по радиусам до границы единичного диска функцией $L(\nu)$.*

После того, как эта лемма доказана, непрерывная продолжимость функции $\lambda(\nu)$ вплоть до границы вытекает из следующего результата комплексного анализа:

Lemma 8.15. *Пусть $\lambda(\nu)$ — голоморфная функция на открытом единичном диске D, и у $\lambda(\nu)$ есть радиальный предел $L(\nu)$ при стремлении ν к границе диска по почти всем радиусам. Пусть предельную функцию $L(\nu)$ можно непрерывно продолжить на окружность.*

Тогда $\lambda(\nu)$ непрерывно продолжается на $\overline{D}$ и $\lambda(\nu) = L(\nu), \nu \in S^1$, где $L(\nu)$ - непрерывное продолжение радиального предела.

Доказательство. Эта лемма следует из вещественного аналога теоремы Коши - теоремы Пуассона. А именно, для $L(\nu) = \lim_{r\to 1-0} \lambda(rz)$ положим

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{S^1} \frac{L(\nu)d\nu}{\nu - z}$$

Запишем аналогичную формулу для интегрирования по окружности радиуса r меньше 1: там соответствующий интеграл Коши от λ будет представлять саму функцию λ:

$$\lambda(rz) = \frac{1}{2\pi i} \int_{S^1} \frac{\lambda(r\nu)d\nu}{\nu - z}$$

Устремляя r к единице и пользуясь теоремой Лебега об ограниченной сходимости, получим, что $F(z)$ и есть радиальный предел λ: $F(z) = \lim_{z\to 1-0} \lambda(rz)$, поэтому $F \equiv \lambda$. При этом F непрерывна в $\overline{D}$. □

8.4 Открытые вопросы

Problem 8.16. Могут ли различные пузыри пересекаться?

Лемма о диаметре пузыря **??** говорит о том, что пузыри не пересекаются, если $C(f)$ достаточно мало. Это выполнено, например, тогда, когда f близко к повороту. В случае достаточно большого $C(f)$ вопрос остается открытым.

Problem 8.17. Могут ли пузыри самопересекаться?

Problem 8.18. Есть ли у отображения модулей $\lambda(\nu)$ критические точки, т.е. те точки, в которых оно имеет нулевую производную и не конформно?

9 Эффект Джозефсона

9.1 Уравнения на торе

В этой серии лекций мы будем рассматривать несколько семейств уравнений на двумерном торе, имеющих отношение к эффекту Джозефсона в физике сверхпроводимости. Основное уравнение имеет вид:

$$\dot{x} = a + b\cos x + \cos t. \tag{9.1}$$

Поскольку правая часть 2π-периодична по обоим переменным (x и t), это уравнение можно рассматривать как уравнение на двумерном торе, получающимся в результате факторизации плоскости $\mathbb{R}^2$ по решетке $2\pi\mathbb{Z}^2$. Впрочем, зачастую мы будем рассматривать его как уравнение на плоскости (поднятие уравнения на торе на универсальную накрывающую). Иногда на лекциях это уравнение называется «уравнением Джозефсона», хотя название это не вполне корректно (а вернее совсем некорректно): Джозефсон открыл другое уравнение.

Интерес представляет также *быстро-медленная версия* этого уравнения с малым параметром μ:

$$\begin{cases} \dot{x} = a + b\cos x + \cos t; \\ \dot{t} = \mu. \end{cases} \tag{9.2}$$

Здесь точка означает дифференцирование по новому времени τ, а t становится просто второй фазовой переменной $t = t(\tau)$.

Наконец, нас будут интересовать возмущение этих уравнений. Например, такое возмущение уравнения (??):

$$\dot{x} = a + b\cos x + \cos t + \varepsilon f(t) + \delta g(x), \tag{9.3}$$

где ε, δ — малые параметры, $f(t)$, $g(t)$ — 2π-периодичные функции.

9.2 Общая теория

Для любого уравнения на торе без особых точек (таковыми являются все рассмотренные выше уравнения) определено *отображение Пуанкаре* с «вертикальной» трансверсальной окружности $t = 0$ на себя, определенное следующим образом: рассмотрим траекторию, проходящую через точку с координатой x, и продолжим её до первого возвращения на трансверсаль $t = 0$. Значение x-координаты точки пересечения — это и есть значение функции $P(x)$, задающей отображение Пуанкаре. Для уравнений (??)-(??) отображение Пуанкаре совпадает с отображением фазового потока за время $2\pi/\mu$, поскольку движение по t происходит с постоянной скоростью.

Из теоремы о гладкой зависимости решения от начального условия и ограниченности длины траекторий следует, что отображение Пуанкаре является диффеоморфизмом окружности. Для всякого диффеоморфизма (шире: гомеоморфизма) окружности определено *число вращения*. Неформально говоря, число вращения — это «средний угол», на который отображение поворачивает точки окружности.

В дальнейшем нам будет удобно считать, что окружность имеет длину 1 и является таким образом фактором $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Definition 9.1. Пусть $f(x)$ — гомеоморфизм окружности, $\widetilde{f}(x)$ — его поднятие на прямую, то есть отображение, совпадающее с $f(x)$ при $x \in [0, 1)$ и удовлетворяющее равенству $f(x + 1) = f(x) + 1$. Тогда числом вращения f называется предел

$$\rho(f) := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(f^n(x) - x). \tag{9.4}$$

Theorem 9.2 (Пуанкаре)**.** *Предел* (??) *всегда существует и не зависит от точки x.*

Exercise 12. Доказать, что если отображение имеет периодическую точку с периодом q, его число вращения рационально и представляется дробью со знаменетелем q.

Theorem 9.3. *Верно и обратно. Число вращение рационально тогда и только тогда, когда f имеет периодические точки. Точнее, если $\rho(f) = p/q$ — несократимая дробь, отображение имеет периодическую точку с периодом q.*

9.3 Языки Арнольда

Арнольд исследовал двупараметрическое семейство отображений окружности

$$f_{a,\varepsilon}\colon x \mapsto x + a + \varepsilon \sin x \tag{9.5}$$

Рассмотрим число вращения этого отображение как функцию от параметров a, ε:

$$\rho(a,\varepsilon) := \rho(f_{a,\varepsilon}) \tag{9.6}$$

Как выглядят множества уровней функции $\rho(a,\varepsilon)$ на плоскости (a,ε)?

Exercise 13. Неподвижная точка функции $f(x)$ сохраняется при малых возмущениях тогда и только тогда, когда $f'(x) \neq 1$. Такие точки называются гиперболическими.

Если отображение f имеет рациональное число вращения, у него имеются периодические точки. Они являются неподвижными точками для некоторой итерации отображения. Если эти точки гиперболические, они сохраняются при малых шевелениях, и значит сохраняется число вращения. Таким образом, на графике $\rho(a,\varepsilon)$ при фиксированном ε могут появиться ступеньки. Они действительно появляются в семействе (**??**), причём для всех рациональных значений. Таким образом, график $\rho(a,\varepsilon)$ имеет вид, похожий на канторову лестницу.

Problem 9.4. Является ли функция $\rho(a,\varepsilon)$ гёльдеровой? Каков показатель Гёльдера? Кто-то считал?

На плоскости (a,ε) имеются множества уровня функции ρ с непустой внутренностью, имеющие вид острых клювов, сужающихся при приближении к оси $\varepsilon = 0$. Они называются *языками Арнольда*.

9.4 Языки Арнольда «уравнения Джозефсона»

Вернёмся в нашим «уравнениям Джозефсона». При $b = 0$, уравнение является интегрируемым.

Exercise 14. Найти число вращения отображения фазового потока за период при $b = 0$.

Remark 9.5. Для уравнения **??** на плоскости (a, b) существуют только языки Арнольда, соответствующие целым числам вращения. Других языков нет.

Это объясняется тем фактом, что $g_{a,b}^{2\pi}$ эквивалентно дробно-линейному (мёбиусовому) отображению:

$$y \mapsto \frac{\alpha y + \beta}{\gamma y + \delta} \tag{9.7}$$

Этот факт позволяет разработать методы компьютерного построения языков Арнольда для нашего семейства. Оказывается, что выглядят они весьма необычно: в частности, у языков есть *перемычки*, в которых они имеют нулевую толщину (и значит в соответствующей точке нет ступеньки), см. рис. **??**.

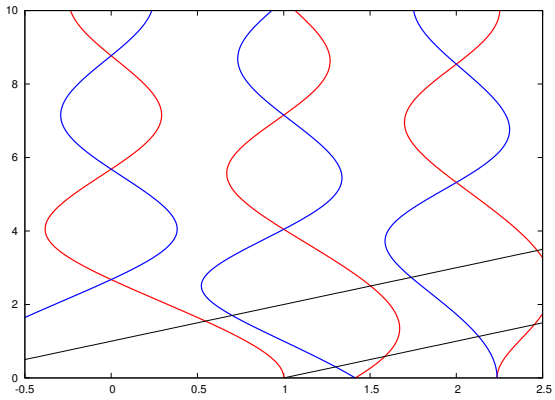

Рис. 9.1: Границы языков Арнольда для «уравнения Джозефсона»

Дробно-линейные преобразования единичной окружности в себя бывают гиперболическими (две неподвижные точки), параболическими (одна полуустойчивая неподвижная точка) и эллиптическими (неподвижные точки выходят в комплексную область, одна из них лежит внутри, а другая вне окружности).

В гиперболическом и параболическом случае число вращения ноль. Все ненулевые числа вращения соответствую эллиптическим дробно-линейным преобразованиям. Эти преобразования эквивалентны поворотам независимо от того, рационально или иррационально число вращения. Поэтому языки Арнольда соответствуют только нулевому числу вращения для отображения Пуанкаре.

Потокам на торе соответствует поднятие отображения Пуанкаре на прямую, нулевому числу вращения — целые числа сдвига (они определяются формулой **??** для поднятого отображения).

Поэтому языки Арнольда для уравнения **??** соответствуют только целым числам вращения.

При малых знчениях b языки Арнольда напоминают классическую картину, приведенную в многих учебниках. Однако при больших b положение резко меняется. Границы языков начинают самопересекаться! У языков возникают перемычки.

Границам языков соответствуют параболические точки отображения Пуанкаре. Когда две компоненты границы пересекаются, у отображения появляются две параболических неподвижных точки (или одна кратности выше двух). Но для мёбиусова преобразования это может быть только в одном случае — когда преобразование тождественно.

Тождественные преобразования имеют коразмерность три в множестве всех дробно-линейных. Однако семейство (**??**) зависит от двух параметров. Как же может в нём возникать явление коразмерности 3?

Ответ был найден А. Клименко: уравнение (**??**) обратимо: оно сохраняет свой фазовый портрет (с обращением временно́й ориентации) при замене $(x,t) \mapsto (-x,-t)$. Следовательно, отображения Пуанкаре нечетны. А пространство нечетных преобразований Мёбиуса двумерно.

Если нечетное преобразование Мёбиуса имеет единственную неподвижную точку — это либо 0, либо π. Одна граница каждого языка соответствует неподвижной параболической точке 0, а другая π. На этом основан быстрый алгоритм вычисления границ языков, предложенный В. Клепцыным.

Численный анализ показал новое удивительное свойство: все перемычки k-го языка лежат на вертикале $a = k$. Этот удивительный факт был недавно объяснен (доказан) А. Глуцюком с помощью теории нормальных форм иррегулярных линейных уравнений. Доказательство использует свойства операторов Стокса.

Физики зметили, что границы языков напоминают функции Бесселя.

Однако это сходство наблюдается только при больших b; при малых b расхождение видно невооруженным глазом. В силу аналитичности это означает, что точного совпадения границ языков с функциями Бесселя нет нигде. Совпадают только главные члены асимптотики. А именно, функции Бесселя задаются формулой

$$J_k(b) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(t - b\sin t)dt,$$

где k — номер функции Бесселя.

В. Клепцын, А. Клименко и О. Ромаскевич доказали теорему.

Theorem 9.6. *Границы k-го языка Арнольда для уравнения* **??** *асимптотически приближаются функциями Бесселя:*

$$\delta_k(b) - k = \pm J_k(b) + o(\frac{1}{\sqrt{b}})$$

при $b \to \infty$.

Используя теорию быстро-медленных систем, В. Клепцын и И. Щуров создали алгоритм и программу вычисления языков в уравнении (**??**). При $\mu = 0.05$ эта картина имеет вид. На рисунке **??** видно, что пространство параметров делится на три области с различным предельным поведением языков при малых μ. В *области* A, заданной неравенством $a < b - 1$, языки тонкие. В *области* B, заданной неравенством $b - 1 < a < b + 1$ границы языков сближаются, языки становятся «толстыми» и начинают занимать практически всю плоскость в пространстве параметров. Наконец, в *области* C, заданной неравенством $a > b + 1$, границы языков образуют «паркет» и наблюдаются перемычки. Это поведение объясняется различным устройством так называемой «медленной кривой» (множеству нулей правой части уравнения на x): в области A медленная кривая отсутствует, в области B она стягиваема, а в области C она распадается на две нестягиваемые кривые.

Список литературы

[1] C.Pugh, M.Shub, A.Wilkinson Holder foliations, revisited, 2011 – 2012(?)

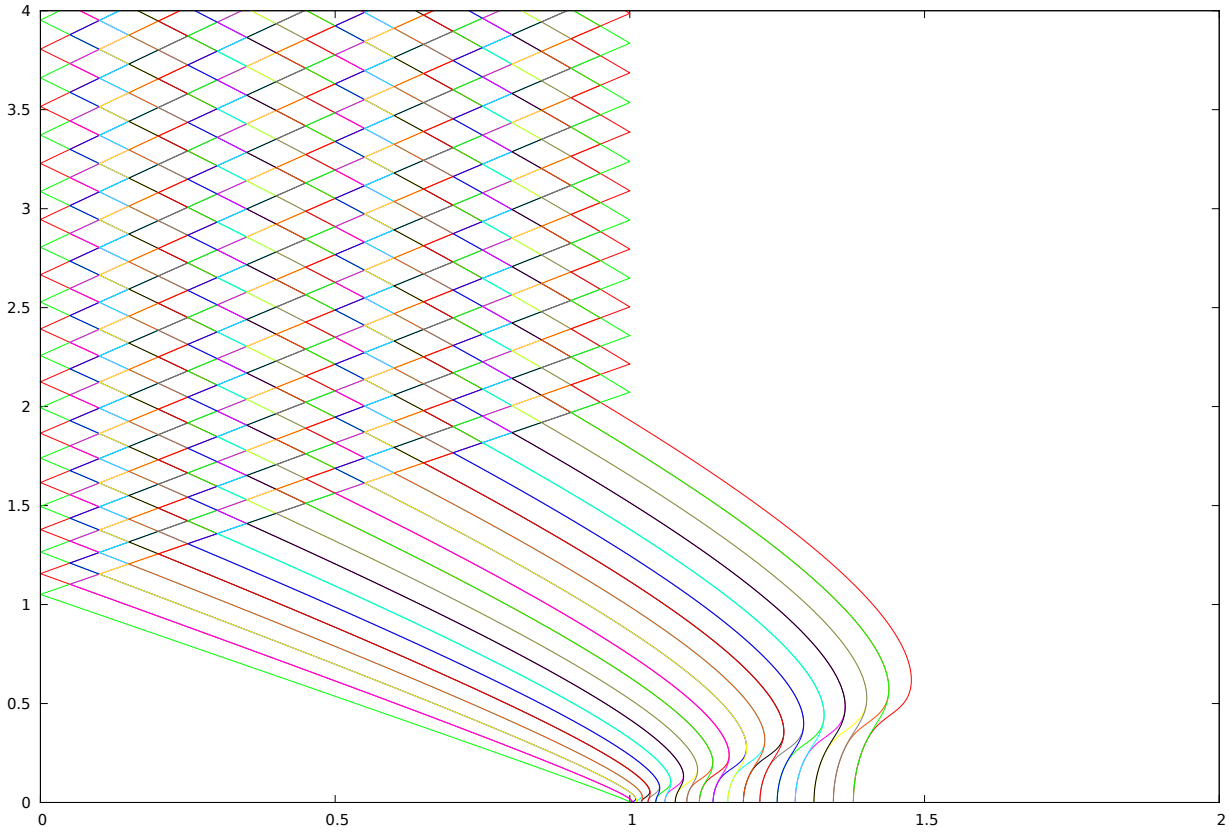

Рис. 9.2: Языки Арнольда для $\mu = 0.05$