Задачи к лекции 5

1) Покажите, что теорема Пуанкаре о возвращении неверна без условия $\mu(X) < \infty$.

2) Сведите бильярд в равностороннем треугольнике к обмотке тора.

3) Закончите доказательство эргодичности иррациональной обмотки тора, показав, что все коэффициенты Фурье инвариантной функции равны нулю.

4) Рассмотрим параметрически заданную кривую $x(t) = A\sin(t+\varphi)$, $y(t) = B\sin(\omega t+\psi)$ ($t \in \mathbb{R}$), называемую *фигурой Лиссажу*. При каких ω она будет плотна в прямоугольнике $\{|x| \le A, |y| \le B\}$?

5) Пусть $\omega(x)$ — ω-предельное множество траектории, выходящей из точки x. Докажите, что:

   а) $\omega(x)$ замкнуто;

   б) если $y \in \omega(x)$, то все точки траектории, проходящей через точку y, лежат в $\omega(x)$;

   в) если $y \in \omega(x)$, то $\omega(y) \subset \omega(x)$;

   г) если фазовое пространство — компакт, то $\omega(x)$ — связно.

6) Пусть $\widetilde{K}$ — множество фазовых точек бильярда в круге, для которых выпущенные из них траектории касаются фиксированной окружности, концентрической этому кругу. Докажите, что множество $\widetilde{K}$ можно разбить на две части — $\widetilde{K}^-$ и $\widetilde{K}^+$, такие что ω-предельное множество любой точки множества $\widetilde{K}^\pm$ есть всё $\widetilde{K}^\pm$.

7) Докажите, что бильярд в эллипсе неэргодичен (подсказка: «конфокальный»).

8) Рассмотрим множество замкнутых ломаных с не более чем n вершинами, таких что все их вершины лежат на кривой Г. Докажите, что у ломаной, имеющей среди них максимальную длину, соседние звенья образуют одинаковые углы с нормалью к Г в их общей вершине. (Указание: как будет изменяться длина ломаной, если одну её вершину слегка подвигать?)

Задачи к лекции 5

1) Покажите, что теорема Пуанкаре о возвращении неверна без условия $\mu(X) < \infty$.

2) Сведите бильярд в равностороннем треугольнике к обмотке тора.

3) Закончите доказательство эргодичности иррациональной обмотки тора, показав, что все коэффициенты Фурье инвариантной функции равны нулю.

4) Рассмотрим параметрически заданную кривую $x(t) = A\sin(t+\varphi)$, $y(t) = B\sin(\omega t+\psi)$ ($t \in \mathbb{R}$), называемую *фигурой Лиссажу*. При каких ω она будет плотна в прямоугольнике $\{|x| \le A, |y| \le B\}$?

5) Пусть $\omega(x)$ — ω-предельное множество траектории, выходящей из точки x. Докажите, что:

   а) $\omega(x)$ замкнуто;

   б) если $y \in \omega(x)$, то все точки траектории, проходящей через точку y, лежат в $\omega(x)$;

   в) если $y \in \omega(x)$, то $\omega(y) \subset \omega(x)$;

   г) если фазовое пространство — компакт, то $\omega(x)$ — связно.

6) Пусть $\widetilde{K}$ — множество фазовых точек бильярда в круге, для которых выпущенные из них траектории касаются фиксированной окружности, концентрической этому кругу. Докажите, что множество $\widetilde{K}$ можно разбить на две части — $\widetilde{K}^-$ и $\widetilde{K}^+$, такие что ω-предельное множество любой точки множества $\widetilde{K}^\pm$ есть всё $\widetilde{K}^\pm$.

7) Докажите, что бильярд в эллипсе неэргодичен (подсказка: «конфокальный»).

8) Рассмотрим множество замкнутых ломаных с не более чем n вершинами, таких что все их вершины лежат на кривой Г. Докажите, что у ломаной, имеющей среди них максимальную длину, соседние звенья образуют одинаковые углы с нормалью к Г в их общей вершине. (Указание: как будет изменяться длина ломаной, если одну её вершину слегка подвигать?)